

# 目 录

<b>第一章 概述</b> .....	(1)
1.1 拱轴线与合理拱轴线 .....	(1)
1.1.1 选择拱轴线的原则 .....	(1)
1.1.2 拱轴线 .....	(1)
1.1.3 合理拱轴线 .....	(4)
1.2 拱圈截面形式及其纵向变化规律 .....	(8)
1.3 基本结构及弹性中心.....	(11)
1.3.1 基本结构.....	(11)
1.3.2 弹性中心.....	(11)
1.4 弹性理论分析.....	(14)
1.4.1 恒载内力分析.....	(14)
1.4.2 活载内力分析.....	(22)
1.4.3 温度变化和混凝土收缩产生的内力.....	(29)
1.4.4 裸拱内力分析(悬链线拱).....	(31)
<b>第二章 挠度理论的基本方程</b> .....	(33)
2.1 基本假定.....	(33)
2.2 曲线坐标下的基本方程.....	(34)
2.2.1 几何方程.....	(34)
2.2.2 内力合成.....	(36)
2.2.3 平衡方程.....	(36)
2.3 极坐标系下的基本方程.....	(37)
2.3.1 几何方程.....	(37)
2.3.2 内力合成.....	(38)
2.3.3 平衡方程.....	(38)

2.4	直角坐标系下的基本方程.....	(38)
2.4.1	几何方程.....	(38)
2.4.2	内力合成.....	(41)
2.4.3	平衡方程.....	(41)
2.5	考虑剪力及温度影响时的平衡方程(直角坐标系) .....	(41)
2.6	固端拱的位移条件.....	(43)
2.7	控制方程的建立.....	(44)
2.7.1	基本结构.....	(44)
2.7.2	恒载作用控制方程.....	(45)
2.7.3	外载作用控制方程.....	(45)
2.8	约束方程.....	(46)
<b>第三章</b>	<b>竖向变形对拱内力的影响 .....</b>	<b>(50)</b>
3.1	基本概念.....	(50)
3.2	几种应用大变形理论的设计方法简介.....	(51)
3.2.1	一般形式的拱桥.....	(51)
3.2.2	抛物线两铰拱.....	(52)
3.2.3	三铰拱.....	(52)
3.3	抛物线拱在均布荷载作用下的大变形内力近似解.....	(55)
3.4	大变形内力的差分解法.....	(59)
3.4.1	不计温度影响并忽略剪力影响项.....	(59)
3.4.2	进一步忽略轴向力对位移的影响.....	(61)
3.5	弯矩增大系数法.....	(64)
<b>第四章</b>	<b>等截面无铰拱的摄动法解答 .....</b>	<b>(70)</b>
4.1	基本方程.....	(70)
4.1.1	恒载阶段.....	(70)
4.1.2	外载阶段.....	(70)
4.2	摄动方程的建立.....	(71)
4.3	摄动方程的求解.....	(77)

4.4 弹性理论的摄动法与力法.....	(84)
4.4.1 弹性理论的摄动法.....	(84)
4.4.2 力法.....	(88)
4.5 弹性理论、线性挠度理论与非线性挠度理论 .....	(89)
<b>第五章 变截面无铰拱——<math>I_x = \frac{I_0 \sec \varphi}{1 - (1-n) \frac{ x }{l}}</math> 时的解</b>	
析解答 .....	(91)
5.1 恒载阶段.....	(91)
5.1.1 挠曲线方程 $w_x$ .....	(91)
5.1.2 未知赘余力.....	(96)
5.2 外载阶段.....	(97)
5.2.1 $x \geq 0$ 时的解答 .....	(98)
5.2.2 $x \leq 0$ 时的解答 .....	(100)
5.2.3 确立常数 $A, B, C, D$ .....	(102)
5.2.4 求未知赘余力 .....	(105)
<b>第六章 变截面无铰拱——<math>I_x = I_0 \sec \varphi</math> 时的解析解答 .....</b>	(109)
6.1 恒载阶段 .....	(109)
6.1.1 挠曲线方程 $w_g$ .....	(109)
6.1.2 未知赘余力 .....	(111)
6.2 外载阶段 .....	(112)
6.2.1 挠曲线方程 .....	(112)
6.2.2 未知赘余力 .....	(115)
<b>第七章 变截面抛物线拱——<math>I_x = I_0 \sec \varphi, A_x = A_0 \sec \varphi</math> 时的解析解答.....</b>	(118)
7.1 基本方程 .....	(118)
7.2 解析解 .....	(119)
7.3 参数计算 .....	(121)
7.3.1 $\alpha_4(x)$ 的表达式 .....	(121)
7.3.2 $\beta_4(x)$ 的表达式 .....	(123)
7.3.3 $\beta_4(l)$ 的表达式 .....	(124)

7.3.4	$\int_{-l}^l \alpha_1(x) dx$ 的表达式	(125)
<b>第八章</b>	<b>两铰拱和三铰拱的挠度理论</b>	(126)
8.1	两铰拱	(126)
8.1.1	恒载阶段	(126)
8.1.2	外载阶段	(127)
8.2	三铰拱	(128)
<b>第九章</b>	<b>挠度理论的几个特性证明</b>	(129)
9.1	挠度理论的特例——弹性理论	(129)
9.2	线性挠度理论	(133)
9.3	轴向力对拱内力的影响	(135)
9.4	变位互等性	(136)
9.4.1	$I_x = \frac{I_d \sec \varphi}{1 - (1-n) \frac{ x }{l}}$	(136)
9.4.2	$I_x = I_d \sec \varphi$	(138)
9.5	挠度理论的弹性中心	(139)
<b>第十章</b>	<b>数值分析</b>	(141)
10.1	恒载在与拱同跨简支曲梁上产生的弯矩	(141)
10.1.1	实腹式拱	(141)
10.1.2	空腹式拱	(142)
10.2	任意变截面的处理	(143)
10.2.1	矩形截面	(143)
10.2.2	变高度的 I 字形、箱形截面	(143)
10.2.3	任意变截面	(144)
10.3	数值计算格式	(145)
10.3.1	恒载阶段	(145)
10.3.2	外载阶段	(145)
10.4	参数对内力的影响	(146)
10.4.1	等截面悬链线拱	(146)
10.4.2	变截面悬链线拱	(146)

10.4.3 变截面圆弧拱	(147)
10.5 线性挠度理论影响线	(147)
10.6 实桥内力分析	(155)
<b>第十一章 模型试验</b>	(170)
11.1 等截面悬链线拱模型	(170)
11.1.1 模型及材料参数	(170)
11.1.2 试验结果	(171)
11.2 变截面悬链线拱模型	(173)
11.2.1 模型及材料参数	(173)
11.2.2 试验结果	(174)
11.3 变截面圆弧拱模型	(176)
11.3.1 模型及材料参数	(176)
11.3.2 试验结果	(177)
<b>附录 I 分部积分法</b>	(180)
<b>附录 II Bessel 微分方程及其解答</b>	(180)
<b>附录 III 二阶线性微分方程的参数变异法求解</b>	(181)
<b>附录 IV <math>I_x = \frac{I_a \sec \varphi}{\left[1 - (1-n) \frac{ x }{l}\right]}</math> 时挠度理论分析程序</b>	(182)
<b>附录 V <math>I_x = I_a \sec \varphi</math> 时的线性挠度理论分析程序</b>	(200)
<b>参考文献</b>	(213)

# 第一章 概 述

## 1.1 拱轴线与合理拱轴线

拱轴线是拱圈截面形心的连线,根据各种荷载情况而定,有圆弧线形、椭圆形、抛物线形和悬链线形等。

### 1.1.1 选择拱轴线的原则

1. 线形合理:最理想的拱轴线是和荷载压力线相重合,这样可使拱圈内只产生轴向力而无弯矩,以充分利用圬工材料的抗压性能。可是拱桥受力,除恒载之外还有活载、温度变化、拱轴弹性压缩、收缩、徐变等影响存在,总会在截面上产生弯矩。相对而言,恒载比重较大,跨径大时越是如此,故一般认为轴线与恒载产生的压力线(不考虑弹性压缩)相重合,即为较合理的拱轴线。

2. 施工简单:拱桥是一外形称之为曲线的桥型。复杂的拱轴线会增加制做上的困难,对于石拱桥、混凝土预制块砌筑拱桥,困难会更大。因此,即使是合理的但是复杂的拱轴线也应设法使之简化,以减少施工代价。

3. 线形美观:注意线形的形象,不使产生突变和可能引起视觉上的不舒服感,以维护拱桥本身所特有的曲线美。

### 1.1.2 拱轴线

#### 1. 折线

折线拱是石拱桥最简单的形式,其中三搭挤石拱桥是最常见的古桥型式,如图 1-1 所示。

图 1-1a)是一稳定结构,图 1-1b)为一可变结构,但在对称载作用下,只要拱石稍有厚度便是稳定的。此种折线形拱在近代已废

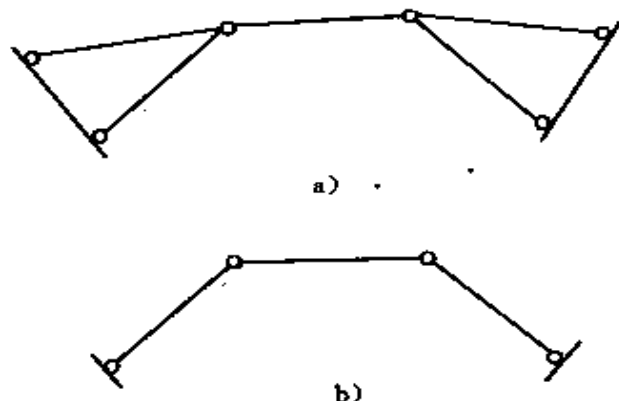


图 1-1 三搭挤石拱

之不用,取而代之的是结点为刚结点的 RC 或 PC 斜腿刚构桥。

## 2. 圆曲线

圆曲线拱桥是中小跨径板拱所普遍采用的一种轴线型式,根据曲线的中心夹角不同,分为马蹄形(大于半圆)、半圆形和圆弧形(小于半圆)三类,实际应用中,还是圆弧形较多,这是由于只有它在分析计算中起拱作用。

若取桥跨径  $L$ ,圆弧半径  $R$ ,拱矢高  $f$ ,中心夹角  $2\phi$ ,拱轴线长  $S$ ,则它们之间的关系式为

$$R = L/2\sin\phi \quad (1-1)$$

$$R = f/(1 - \cos\phi) \quad (1-2)$$

$$f/L = (1 - \cos\phi)/2\sin\phi \quad (1-3)$$

$$\phi = 2\sin^{-1}(2f/L) \quad (1-4)$$

$$S = 2R\phi \quad (1-5)$$

式(1-4)表明,中心夹角  $2\phi$  与矢跨比成一定的比率,不管拱跨大小如何,只要矢跨比不变,其中心夹角亦不变。

若取拱轴线顶为坐标原点, $x$  轴向左, $y$  轴向下,如图 1-2 所示,则圆弧拱轴线上任意点的方程为

$$y = R(1 - \cos\theta) = R - \sqrt{R^2 - x^2} \quad (1-6)$$

$$x = R\sin\theta \quad (1-7)$$

## 3. 抛物线

抛物线又可分为二次抛物线和高次抛物线,其线型又可形成

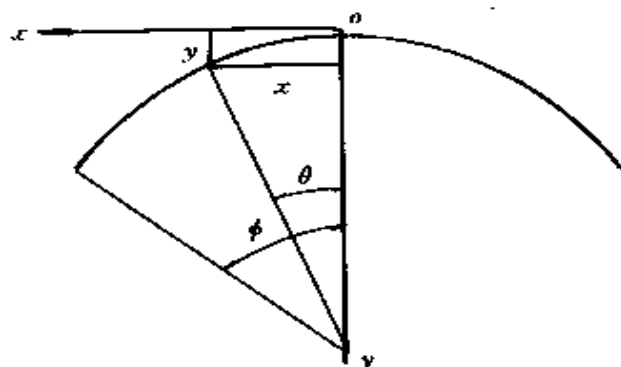


图 1-2 圆弧拱轴线方程

抛物线族。

对于坐标原点在拱顶的二次抛物线,其曲线方程为

$$y = \frac{4f}{L^2}x^2 \quad (1-8)$$

此方程分析计算时公式简单,计算方便。

高次抛物线通式可以表达为

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots \quad (1-9)$$

实际应用时,可根据需要来取舍多项式的项数以达到合理使用的目的。

#### 4. 悬链线

抛开悬链线的初始定义,用在拱桥上的悬链线实际上是倒悬链线。若取坐标原点在拱顶, $x$ 轴向左, $y$ 轴向下,则其曲线方程为

$$y = \frac{f}{m-1}(\operatorname{ch} k\xi - 1) \quad (1-10)$$

式中各符号含义见下小节推导。此曲线实际上也是一曲线族,取不同的  $m$  值,可以得出不同位置的拱轴线。当  $m=1$  时,即为曲线轴中最低的一条曲线——抛物线。

#### 5. 椭圆形线

椭圆拱可在较小的矢高情况下取得比圆弧拱大的通航净空,历史上曾有使用。

仍以拱顶为坐标原点,对称半拱的椭圆拱轴线方程为

$$y = f(1 - \sqrt{1 - \xi^2}) \quad (1-11)$$



式中:  $f$  为矢高,  $\xi = \frac{x}{l}$ ,  $l = L/2$ 。

### 1.1.3 合理拱轴线

所谓合理拱轴线, 即与恒载压力线相重合的拱轴线。实际上, 由于拱上受力复杂, 严格地讲, 不存在合理拱轴线。但基于某些假定, 出于实用, 抓住拱桥中恒载占很大比例这个主要点, 就求得“合理拱轴线”。

#### 1. 圆弧线

现在来推导以圆弧线作为合理拱轴线的拱上荷载分布曲线。

假定荷载分布曲线为  $n$  阶幂级数方程, 有  $n+1$  个常数系数, 根据拱轴线和压力线相重合的  $n+1$  个截面的平衡条件, 可以求得这些系数, 于是, 便可求得荷载分布曲线。

现在以三阶幂级数为例进行推导。设拱上荷载分布曲线为

$$q(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \quad (1-12)$$

$$\because x = R\sin\theta \quad \therefore dx = R\cos\theta d\theta \quad (1-13)$$

得

$$q(x) = a + bR\sin\theta + cR^2\sin^2\theta + dR^3\sin^3\theta \quad (1-14)$$

半拱荷载(重力)

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\pi} q(x) dx \\ &= \int_0^{\pi} (a + bR\sin\theta + cR^2\sin^2\theta + dR^3\sin^3\theta) R\cos\theta d\theta \\ &= aR\sin\phi + \frac{bR^2}{2}\sin^2\phi + \frac{cR^3}{3}\sin^3\phi + \frac{dR^4}{4}\sin^4\phi \end{aligned} \quad (1-15)$$

半拱对拱脚的弯矩

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{\pi} q(x) x dx \\ &= \int_0^{\pi} (aR^2\sin\theta\cos\theta + bR^3\sin^2\theta\cos\theta + cR^4\sin^3\theta\cos\theta \\ &\quad + dR^5\sin^4\theta\cos\theta) d\theta \\ &= \frac{aR^2}{2}\sin^2\phi + \frac{bR^3}{3}\sin^3\phi + \frac{cR^4}{4}\sin^4\phi + \frac{dR^5}{5}\sin^5\phi \end{aligned} \quad (1-16)$$

半拱对拱顶取矩平衡有

$$Hf - V \frac{L}{2} + M = 0 \quad (1-17)$$

即

$$H = \left( \frac{VL}{2} - M \right) / f \quad (1-18)$$

$$\because L/2 = R \sin \phi; f = R(1 - \cos \phi)$$

得

$$H = \frac{1}{\cos \phi} \left[ V \sin \phi - \frac{aR}{2} \sin^2 \phi - \frac{bR^2}{3} \sin^3 \phi - \frac{cR^3}{4} \sin^4 \phi - \frac{dR^4}{5} \sin^5 \phi \right] \quad (1-19)$$

对拱轴任一截面取平衡则有

$$\int_0^\theta q dx = H \tan \theta \quad (1-20)$$

将已知的  $H$  等代入后整理有

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{R(1 - \cos \phi) \cos \theta}{\sin \phi} + \frac{R}{2} \sin \phi \right] a \\ & + \left[ \frac{R^2(1 - \cos \phi)}{2 \sin \phi} \sin \theta \cos \theta + \frac{R^2}{3} \sin^2 \phi \right] b \\ & + \left[ \frac{R^3(1 - \cos \phi)}{3 \sin \phi} \sin^2 \theta \cos \theta + \frac{R^3}{4} \sin^3 \phi \right] c \\ & + \left[ \frac{R^4(1 - \cos \phi)}{4 \sin \phi} \sin^3 \theta \cos \theta + \frac{R^4}{5} \sin^4 \phi \right] d = V \end{aligned} \quad (1-21)$$

取拱轴线四个不同点的平衡方程可得出四个方程的方程组，用矩阵方式表达为

$$[K]\{A\} = EV \quad (1-22)$$

式中： $\{A\} = [a \ b \ c \ d]^T$

$E$  = 单位矩阵

$$[K] \text{ 亦可写为 } [K] = [k][R] \quad (1-23)$$

式中： $[R]$  为半径的对角矩阵，其对角元素为  $R, R^2, R^3, R^4$ 。

解方程(1-22)得

$$\{A\} = [K]^{-1}EV = [R]^{-1}[k]^{-1}EV \quad (1-24)$$

$[R]^{-1}$  亦对角矩阵，其对角元素为  $1/R, 1/R^2, 1/R^3, 1/R^4$ 。得

公式(1-12)中的各系数

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{R} \sum_1^4 k_{1n}^{-1}; & b &= \frac{1}{R^2} \sum_1^4 k_{2n}^{-1}; \\ c &= \frac{1}{R^3} \sum_1^4 k_{3n}^{-1}; & d &= \frac{1}{R^4} \sum_1^4 k_{4n}^{-1}. \end{aligned} \quad (1-25)$$

若令  $V=1$ , 则有

$$Rq(x) = \sum_1^4 k_{1n}^{-1} + \sum_1^4 k_{2n}^{-1} \sin \theta + \sum_1^4 k_{3n}^{-1} \sin^2 \theta + \sum_1^4 k_{4n}^{-1} \sin^3 \theta \quad (1-26)$$

## 2. 抛物线

不计拱轴弹性压缩影响时, 外荷载为均布荷载  $q(x) = q$  时, 其恒载压力线为抛物线。反过来说, 抛物线是荷载为均布载的合理拱轴线, 现推证如下:

如图 1-3 所示, 根据合理拱轴线的定义, 对拱轴任意截面取矩, 可得

$$y = \frac{M_x}{H_g} \quad (1-27)$$

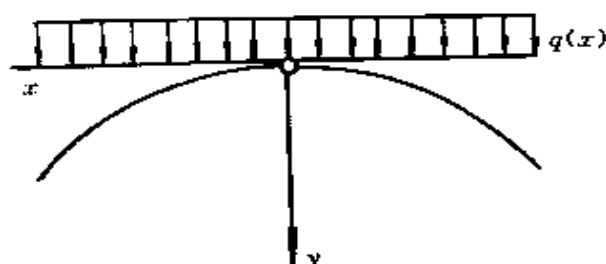


图 1-3 抛物线

则

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{H_g} \frac{d^2 M_x}{dx^2} = \frac{q(x)}{H_g} \quad (1-28)$$

将  $y = \frac{4f}{L^2} x^2$  代入式(1-28)有

$$\frac{8f}{L^2} = \frac{q(x)}{H_g} \quad (1-29)$$

解得

$$q(x) = \frac{8f}{L^2} H_g \quad (1-30)$$

### 3. 悬链线

将  $y = \frac{f}{m-1} (\text{ch} k\xi - 1)$  代入式(1-28)中有

$$\begin{aligned} \frac{q(x)}{H_g} &= \frac{d^2 \left[ \frac{f}{m-1} (\text{sh} k\xi - 1) \right]}{dx^2} \\ &= \frac{f}{m-1} \frac{k^2}{l^2 q_d} \text{ch} k\xi \end{aligned} \quad (1-31)$$

而  $k^2 = \frac{l_1^2 q_d}{H_g f} (m-1) \quad (1-32)$

则  $q(x) = q_d \text{ch} k\xi \quad (1-33)$

亦即  $q(x) = q_d \left[ 1 + (m-1) \frac{y}{f} \right] \quad (1-34)$

根据  $m$  的定义,  $m = \frac{q_i}{q_d}$  代入上式, 并令

$$\gamma = \frac{q_i - q_d}{f} \quad (1-35)$$

得  $q(x) = q_d + \gamma y \quad (1-36)$

式(1-36)的荷载形状即为图 1-4

所示。

以上各式中:  $q_d$ ——拱顶的恒载集度;

$q_i$ ——拱脚的恒载集度;

$\gamma$ ——拱上材料的容重;

$H_g$ ——拱轴推力;

$$\xi = \frac{x}{l}$$

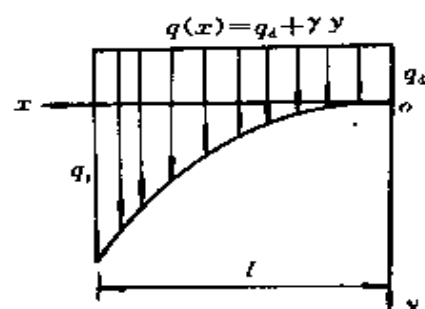


图 1-4 悬链线

### 4. 其它曲线

适用于拱轴线的线型较多, 选定线型作为合理拱轴线来求外荷载的分布往往比较容易, 但没有多少实用价值, 在实际工作中, 大多还是根据外载情况来求合理拱轴线型。拱轴线又与恒载的布

置有关,故在计算时,可先假定一拱轴线型式决定恒载,再算出恒载压力线坐标,如果算出的坐标与原先假定的线型出入较大,则又需以算得的坐标为准,定出恒载,再算一次,这样反复几次,遂次渐近。

有时也可用数值算法求出恒载压力线。这时,不是连续函数表达式,再用与此压力线相逼近的连续曲线作为拱轴线,例如可采用四次抛物线:

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \quad (1-37)$$

系数  $a, b, c, d, e$  可根据边界条件和连续条件来确定。先用数解法求恒载压力线纵坐标  $y$ , 然后在压力线上选与待定系数相等的点, 一般可选拱顶、 $\frac{l}{8}$ 、 $\frac{l}{4}$ 、 $\frac{3l}{8}$ 、拱脚五点, 将其坐标  $x_1, y_1; x_2, y_2; \dots$  等分别代入式(1-37), 解联立方程, 即可求得各系数值。

## 1.2 拱圈截面形式及其纵向变化规律

根据不同的拱桥, 拱圈可有不同的截面形式, 如板拱是截面为矩形截面的拱圈; 肋拱是拱圈由矩形或 T 形或其它形式的拱肋与横系梁组成的; 双曲拱的拱圈则由拱肋、拱波和拱板与横向连系组成, 箱形拱的截面则由单箱或多箱组成。

拱圈有等截面和变截面两种形式, 变截面拱圈可有两种做法, 一是拱圈沿拱轴方向不变宽度而只变厚度, 一种是厚度不变而改变拱圈的宽度, 如图 1-5 所示。

拱圈截面的变化, 与其受力有很大关系。由力学原理知, 拱圈截面上作用着轴向力  $N$  和弯矩  $M$  (暂不计剪力), 而轴向力可近似表示为  $N = \frac{H}{\cos\varphi}$ , 此处  $H$  为水平推力,  $\varphi$  为任意截面处拱轴线切线与水平线的夹角, 由于  $\cos\varphi$  值是由拱顶向拱脚逐渐减小的, 因此轴向力  $N$  由拱顶向拱脚就逐渐增大, 特别是在陡拱中, 它的差值悬殊更大, 为了使各截面的应力值趋于相等, 拱圈的截面也应自拱顶向拱脚逐渐增大。但拱轴中弯矩  $M$  变化非常复杂, 它不仅与截

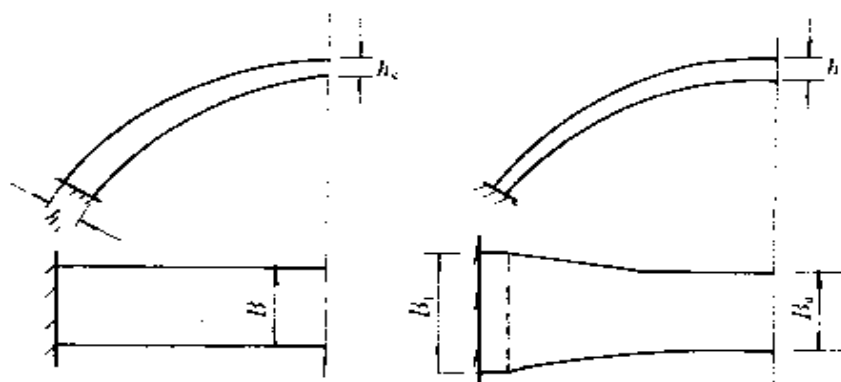


图 1-5 变截面拱圈的两种型式

面位置及荷载布置有关,而且与截面变化规律有着密切的关系,随着截面惯性矩由拱顶向拱脚增加,分配到这些截面的弯矩值也随之增大.所以,用增大截面惯性矩来减小弯曲应力的方法并不是最有效的.而且根据拱桥的试验知,由于拱上结构与主拱圈的共同作用,拱上结构对主拱圈的内力(主要指截面弯矩值)有明显的减载作用(对拱顶影响较小,对 $\frac{1}{4}$ 拱跨至拱脚区段较显著),因此在一般情况下,拱桥仍宜采用等截面型式.目前在拱桥设计中,其截面变化规律有以下几种:

$$(1) \quad I_x = \frac{I_d}{1 + \alpha \frac{x^2}{l}}, \alpha = \frac{I_d}{I_j} - 1 \quad (1-38)$$

$$(2) \quad I_x = \frac{I_d \sec \varphi}{1 - (1 - n) \frac{|x|}{l}} \quad (1-39)$$

$$(3) \quad I_x = \frac{I_d}{\cos \varphi} \quad (1-40)$$

$$(4) \quad I_x = I_d = I_j = \text{常数} \quad (1-41)$$

(5) 英国曼宁(G. P. Manning)氏以幂级数作为拱轴公式时,曾假定

$$\frac{1}{EI_x} = \frac{dx}{ds} \left[ 1 + \beta \frac{x}{l} \right] \frac{1}{EI_d} \quad (1-42)$$

以上各式中:

$I_d$ ——拱顶截面的惯性矩;

$I_j$ ——拱脚截面的惯性矩；

$n$ ——变截面系数  $0 < n < 1, n = \frac{I_d}{I_j \cos \varphi_1}$ ；

$\beta$ ——系数， $-0.9 \leq \beta \leq 0$ ；

$l$ ——半跨长，即  $l = \frac{L}{2}$ 。

在以上各变化规律中，以式(1-39)应用最多，此式亦称李特(Ritter)公式。对于等宽变厚的实体矩形截面，其截面惯性矩为

$$I_x = \frac{1}{12} b h_x^3 \quad (1-43)$$

则可由李特公式直接求出任意截面的高度  $h_x$  为

$$h_x = h_d \cdot C \frac{1}{\sqrt[3]{\cos \varphi}} \quad (1-44)$$

$$C = \sqrt[3]{\left[1 - (1 - n) \frac{x}{l}\right]^{-1}} \quad (1-45)$$

对于如图 1-6 所示的等宽变高的 I 形及箱形截面，则  $I_x = \frac{1}{12} (1 - \alpha \beta^3) b h_x^3$ 。在挖空率  $\alpha, \beta$  不变的情况下，式(1-44、1-45)仍然适用，此时腹板的厚度保持不变，而翼板厚度从拱顶向拱脚逐渐增大。

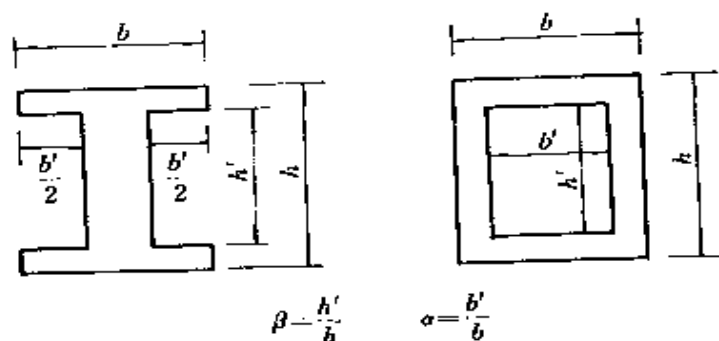


图 1-6 工字形及箱形截面

对于等厚变宽的实体矩形截面，同理可求得任意截面的宽度  $b_x$  为

$$b_x = D b_d / \cos \varphi \quad (1-46)$$

$$D = \left[1 - (1 - n) \frac{x}{l}\right]^{-1} \quad (1-47)$$

为既不失变截面的特点,又有利于施工,也可在拱跨中部  $2/3$  或  $3/4$  跨径范围内采用等截面,而在两端各  $\frac{1}{6}$  或  $\frac{1}{8}$  跨径范围内采用向拱脚增大的变截面。

### 1.3 基本结构及弹性中心

#### 1.3.1 基本结构

用弹性理论分析无铰拱桥内力时,常取以下两种基本结构。

##### 1. 悬臂曲梁

如图 1-7 所示,将拱轴从拱顶截开,附加一对刚性悬臂,将三个赘余力  $X_1$ 、 $X_2$ 、 $X_3$  移止弹性中心上,弹性中心位置离拱顶距离为  $y_0$ 。

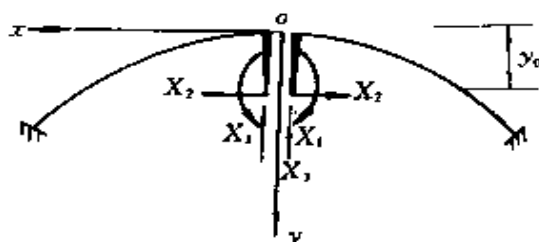


图 1-7 悬臂曲梁

##### 2. 简支曲梁

如图 1-8 所示,将无铰拱的三个赘余约束取掉,代之赘余力,拱脚取为一端固定支撑,一端活动支撑,赘余力亦移止弹性中心上。

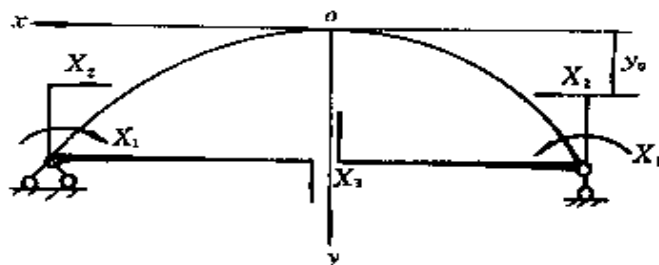


图 1-8 简支曲梁

#### 1.3.2 弹性中心

根据弹性中心的特性,在正则方程



$$[\delta]\{X\} + \{\Delta\} = 0 \quad (1-48)$$

中,各副变位  $\delta_{ij} (i \neq j)$  均为零,有

$$\int_s \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_2}{EI_x} ds = 0; \quad \int_s \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_3}{EI_x} ds = 0; \quad \int_s \frac{\overline{M}_2 \overline{M}_3}{EI_x} ds = 0; \quad (1-49)$$

$$\text{而} \quad \overline{M}_1 = 1; \quad \overline{M}_2 = y_0 - y; \quad \overline{M}_3 = \pm x \quad (1-50)$$

将式(1-50)代入式(1-49),分别有

$$\int_s \frac{y_0 - y}{EI_x} ds = 0 \quad (1-51)$$

$$\int_s \frac{\pm x}{EI_x} ds = 0 \quad (1-52)$$

$$\int_s \frac{\pm x(y_0 - y)}{EI_x} ds = 0 \quad (1-53)$$

式(1-52)自动满足。式(1-51)满足时,式(1-53)亦满足。解式(1-51)有

### 1. 圆弧线拱

$$y_0 = \int_s \frac{y ds}{EI_x} \bigg/ \int_s \frac{ds}{EI_x} \quad (1-54)$$

$$\because \quad y = R - \sqrt{R^2 - x^2} \quad (1-55)$$

$$ds = \frac{dx}{\cos \varphi} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} dx = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx \quad (1-56)$$

$$\therefore y_0 = \int_L \frac{[R^2 / \sqrt{(R^2 - x^2)} - R]}{EI_x} dx \bigg/ \int_L \frac{R dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} EI_x \quad (1-57)$$

对于等截面拱,  $EI$  为常数, 则有

$$\begin{aligned} y_0 &= \int_L \left[ \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} - R \right] dx \bigg/ \int \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx \\ &= \left[ R^2 \arcsin \frac{x}{R} - Rx \right]_{-l}^l \bigg/ \left[ R \arcsin \frac{x}{R} \right]_{-l}^l \\ &= \left[ 2R^2 \arcsin \frac{l}{R} - 2Rl \right] \bigg/ \left[ 2R \arcsin \frac{l}{R} \right] \end{aligned}$$

$$= R - l / \arcsin \frac{l}{R} \quad (1-58)$$

2. 抛物线拱

$$\therefore y = \frac{f}{l^2} x^2 \quad (1-59)$$

$$\begin{aligned} ds &= \frac{dx}{\cos \varphi} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} dx \\ &= \sqrt{1 + \frac{4f^2}{l^2} x^2} dx \end{aligned} \quad (1-60)$$

$$\begin{aligned} \therefore y_0 &= \left[ \int_{-L}^L \frac{f}{l^2} x^2 \sqrt{1 + \frac{4f^2}{l^2} x^2} dx / EI_x \right] \\ &\quad \left/ \left[ \int_{-L}^L \sqrt{1 + \frac{4f^2}{l^2} x^2} dx / EI_x \right] \right. \end{aligned} \quad (1-61)$$

对于等截面拱

$$\begin{aligned} y_0 &= \int_{-L}^L \frac{f}{l^2} x^2 \sqrt{1 + \frac{4f^2}{l^2} x^2} dx \left/ \int_{-L}^L \sqrt{1 + \frac{4f^2}{l^2} x^2} dx \right. \\ &= \frac{f}{3} \end{aligned} \quad (1-62)$$

3. 悬链线拱

$$\therefore y = \frac{f}{m-1} (\operatorname{ch} k\xi - 1) \quad (1-63)$$

$$\begin{aligned} ds &= \frac{dx}{\cos \varphi} = \frac{L}{2} \frac{d\xi}{\cos \varphi} = l \frac{d\xi}{\cos \varphi} \\ &= l \sqrt{1 + \eta^2 \operatorname{sh}^2 k\xi} d\xi \end{aligned} \quad (1-64)$$

$$\begin{aligned} \therefore y_0 &= \int_0^1 \frac{f}{m-1} (\operatorname{ch} k\xi - 1) l \\ &\quad \sqrt{1 + \eta^2 \operatorname{sh}^2 k\xi} d\xi / EI_x \\ &\quad \left/ \int_0^1 l \sqrt{1 + \eta^2 \operatorname{sh}^2 k\xi} d\xi / EI_x \right. \end{aligned} \quad (1-65)$$

对于等截面拱有

$$y_0 = \frac{f}{m-1} \frac{\int_0^1 (\operatorname{ch} k\xi - 1) \sqrt{1 + \eta^2 \operatorname{sh}^2 k\xi} d\xi}{\int_0^1 \sqrt{1 + \eta^2 \operatorname{sh}^2 k\xi} d\xi} \quad (1-66)$$

对于截面变化规律为李特公式  $I_x = \frac{I_d}{[1 - (1-n)\xi]\cos\varphi}$  的拱, 式(1-65)为可积形式, 可得

$$y_0 = \frac{2f}{(m-1)(1+n)} \left[ \frac{n\sqrt{m^2-1}}{k} + \frac{(1-n)(m-1)}{k^2} - \frac{1+n}{2} \right] \quad (1-67)$$

对于其它曲线型式的拱轴线, 同样可求得弹性中心位置  $y_0$ 。

## 1.4 弹性理论分析

### 1.4.1 恒载内力分析

#### 1. 非合理拱轴线拱

由于结构及荷载均为对称, 如采取悬臂曲梁(图 1-7)为基本结构时, 在弹性中心仅有两个赘余力——弯矩  $M(x_1)$  和水平力  $H(x_2)$ , 如图 1-9 所示。

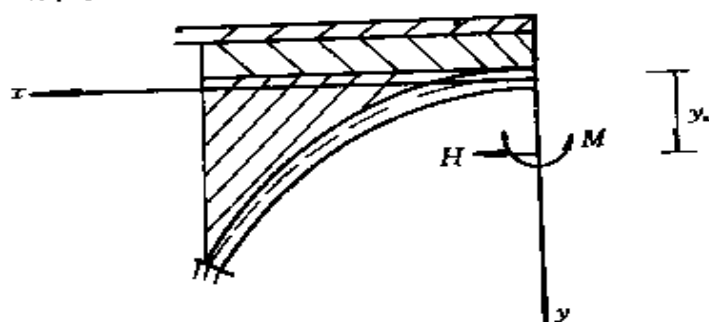


图 1-9 恒载内力计算

力法方程为

$$\begin{cases} \delta_{11}M + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{22}H + \Delta_{2p} = 0 \end{cases} \quad (1-68)$$

式中:

$$\delta_{11} = \int_s \frac{M_1^2}{EI_x} ds$$

$$\delta_{22} = \int_s \frac{M_2^2}{EI_x} ds$$

$$\Delta_{1p} = \int_0^x \frac{M_1 M_p}{EI_x} ds$$

$$\Delta_{2p} = \int_0^x \frac{M_2 M_p}{EI_x} ds$$

$M_1=1$ ;  $M_2=y_0-y$ ,  $M_p$  为恒载产生的弯矩。对于实腹式拱,可将恒载分为三部分,一部分为路面,另一部分为拱腹填料,第三部分为主拱圈。各部分引起的单位宽拱圈弯矩表达式分别为:

(1)路面

假定路面材料的容重为  $\gamma_1$ , 则

$$M_p^1 = - \int_0^x \gamma_1 h_1 (x-z) dz = - \frac{x^2}{2} \gamma_1 h_1 \quad (1-69)$$

式中:  $h_1$ ——路面厚度。

(2)拱腹填料

假定拱腹填料材料容重  $\gamma_2$ , 则

$$M_p^2 = - \int_0^x \gamma_2 (h+y) (x-z) dz \quad (1-70)$$

式中:  $h$ ——拱顶填料厚度。

(3)主拱圈

假定主拱圈材料单位体积重为  $\gamma_3$ , 则

$$M_p^3 = \int_0^x \frac{1}{\cos \varphi} d\gamma_3 (x-z) dz \quad (1-71)$$

式中:  $d$ ——主拱圈厚度。

$$M_p = M_p^1 + M_p^2 + M_p^3 \quad (1-72)$$

对于空腹式拱桥,  $M_p$  可分为四部分组成, 即实腹段路面、实腹段填料、腹孔墩位置的集中力和主拱圈。

(1)实腹段路面

$$M_p^1 = \begin{cases} \int_0^x h r_1 (x-z) dz = \frac{h_1 r_1}{2} x^2 & (0 \leq x \leq s) \\ s r_1 (x - \frac{s}{2}) h_1 & (s \leq x \leq l) \end{cases} \quad (1-73)$$

式中:  $s$ ——实腹段长度。

## (2) 实腹段填料

$$M_p^2 = \begin{cases} \int_0^x r_2(h+y)(x-z)dz & (0 \leq x \leq s) \\ \left[ \int_0^s r_2(h+y)(s-z)dz \right] (x-s_1) & (s \leq x \leq l) \end{cases} \quad (1-74)$$

式中:  $s_1$ ——实腹填料荷载形心至拱顶的距离。

## (3) 腹孔墩位置的集中力

$$M_p^3 = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq s) \\ \sum P_i(x-x_i) & \end{cases} \quad (1-75)$$

(计算点以右各立柱对计算点产生的弯矩之和)

式中:  $P_i$ ——立柱  $i$  下的集中力;

$x_i$ ——立柱  $i$  至拱顶的距离。

## (4) 主拱圈

$$M_p^4 = \int_0^x \frac{d\gamma_3}{\cos\varphi} (x-z)dz \quad (1-76)$$

$$M_p = M_p^1 + M_p^2 + M_p^3 + M_p^4 \quad (1-77)$$

## 2. 合理拱轴线<sup>[16]</sup>

当采用恒载压力线作拱轴线时,如果拱是绝对刚性,即拱轴长度是不变的,则在恒载作用下拱内仅产生轴向压力而无弯矩和剪力。但拱并非绝对刚性,主拱圈在轴向压力作用下,将发生弹性压缩变形,拱轴要缩短,由此会在无铰拱中产生弯矩和剪力,这就是所谓弹性压缩影响。拱圈的轴向力主要是由恒载和活载作用下发生的,因此,拱圈弹性压缩对内力的影响也要在恒载和活载内力计算中分别计入。拱圈弹性压缩影响与恒载、活载作用下产生的内力是同时发生的。但为了计算上的方便,先计算不考虑弹性压缩时的内力,再计算弹性压缩引起的内力,然后两者叠加起来。

### 1) 不考虑弹性压缩时的恒载内力

#### (1) 实腹拱

实腹式悬链线拱的拱轴线与恒载压力线完全吻合,所以,在恒

载作用下,主拱各截面上仅产生轴向压力。根据力的平衡条件,拱的竖直反力为

$$V_g = \int_0^l g_x dx = \int_0^l l_1 g_d \left[ 1 + (m-1) \frac{y}{f} \right] d\xi = 2k'_g g_d l \quad (1-78)$$

式中:  $k'_g = \frac{\sqrt{m^2 - 1}}{2[\ln(m + \sqrt{m^2 - 1})]}$

由公式(1-32)可得恒载水平推力为

$$H_g = \frac{m-1}{4k^2} \frac{4g_d l^2}{f} = 4k_g \frac{g_d l^2}{f} \quad (1-79)$$

式中:  $k_g = \frac{m-1}{4k^2}$

系数  $k'_g$ 、 $k_g$  可自公路设计手册《拱桥》表(III)-4 查得。

主拱各截面的轴向力可按下式计算,而恒载弯矩和剪力均为零。

$$N = \frac{H_g}{\cos \varphi} \quad (1-80)$$

## (2)空腹式拱

空腹式悬链线无铰拱,如暂不考虑拱轴偏离影响,则拱的恒载推力  $H_g$  和拱脚竖直反力  $V_g$ ,可直接由力的平衡条件求之。

$$\left. \begin{aligned} H_g &= \frac{\Sigma M_j}{f} \\ V_g &= \Sigma P \end{aligned} \right\} \quad (1-81)$$

式中:  $\Sigma M_j$ ——半跨恒载对拱脚的力矩;

$\Sigma P$ ——半跨恒载重力。

有了  $H_g$  之后,即可利用公式(1-80)求出主拱各截面的轴向力,并认为恒载弯矩和剪力为零。

## 2)恒载作用下弹性压缩引起的内力

如前所述,在恒载轴向压力作用下,主拱的弹性压缩引起拱轴沿跨径方向缩短  $\Delta L_g$ ,为了平衡这一弹性压缩,就必须有一个作用于弹性中心而方向向外的水平力  $\Delta H_g$ (图 1-10)。

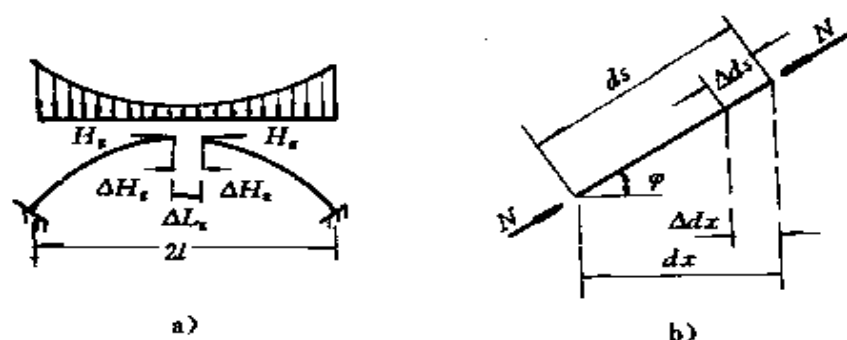


图 1-10 弹性压缩引起拱轴缩短

根据变形协调条件可得：

$$\begin{aligned}\Delta H_g \delta_{22} - \Delta L_g &= 0 \\ \Delta H_g &= \frac{\Delta L_g}{\delta_{22}}\end{aligned}\quad (1-82)$$

$\Delta L_g$  为由于恒载轴向压力引起的拱轴沿跨径方向的压缩(即水平方向的变位),其值为[见图 1-10b)]:

$$\Delta L_g = \int_{-l}^l \Delta dx$$

而

$$\begin{aligned}\Delta dx &= \Delta ds \cos \varphi = \frac{N ds}{EA_x} \cos \varphi \\ &= \frac{N dx}{EA_x} = \frac{H_g}{\cos \varphi} \frac{dx}{EA_x}\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\Delta L_g &= \int_{-l}^l \frac{H_g dx}{EA_x \cos \varphi} \\ &= H_g \int_{-l}^l \frac{dx}{EA_x \cos \varphi}\end{aligned}\quad (1-83)$$

由单位水平力作用在弹性中心,其产生的水平位移(考虑轴向力的影响)为

$$\begin{aligned}\delta_{22} &= \int_s \frac{\bar{M}_2^2 ds}{EI_x} + \int_s \frac{\bar{N}_2^2 ds}{EA_x} \\ &= \int_s \frac{y_1^2 ds}{EI_x} + \int_s \frac{\cos^2 \varphi ds}{EA_x} \\ &= (1 + \mu) \int_s \frac{y_1^2 ds}{EI_x}\end{aligned}\quad (1-84)$$

式中:  $y_1 = y_0 - y$

$$\mu = \frac{\int_0^l \frac{\cos^2 \varphi}{EA_x} ds}{\int_0^l \frac{y_1^2}{EI_x} ds} \quad (1-85)$$

以式(1-83)、(1-84)代入式(1-82)得

$$\Delta H_s = \frac{H_s}{1 + \mu} \frac{\int_{-1}^1 \frac{dx}{EA_x \cos \varphi}}{\int_0^l \frac{y_1^2}{EI_x} ds} = H_s \frac{\mu_1}{1 + \mu} \quad (1-86)$$

式中:

$$\mu_1 = \frac{\int_{-1}^1 \frac{dx}{EA_x \cos \varphi}}{\int_0^l \frac{y_1^2}{EI_x} ds} \quad (1-87)$$

对于等截面拱  $\mu$  和  $\mu_1$  的两个公式中,分母项可查公路设计手册《拱桥》下册附录 III 表(III)-5。分子项可改写为

$$\begin{aligned} \int_0^l \frac{\cos^2 \varphi}{EA} ds &= \frac{2l}{EA} \int_{-1}^1 \cos \varphi \frac{dx}{2l} \\ &= \frac{2l}{EA} \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 + n^2 \operatorname{sh}^2 k\xi}} \\ &= \frac{2l}{EA} \frac{1}{r} \end{aligned} \quad (1-88)$$

$$\begin{aligned} \int_0^l \frac{dx}{EA \cos \varphi} &= \frac{2l}{EA} \int_{-1}^1 \cos \varphi \frac{dx}{2l} \\ &= \frac{2l}{EA} \int_{-1}^1 \sqrt{1 + n^2 \operatorname{sh}^2 k\xi} dx \\ &= \frac{2l}{EA} \frac{1}{r_1} \end{aligned} \quad (1-89)$$

于是

$$\mu = \frac{2l}{ErA \int_0^l \frac{y_1^2}{EI_x} ds} \quad (1-90)$$

$$\mu_1 = \frac{2l}{Er_1A \int_0^l \frac{y_1^2}{EI_x} ds} \quad (1-91)$$



式中  $\gamma, \gamma_1$  值可自公路设计手册《拱桥》表(III)-10、表(III)-8 查得。

由于  $\Delta H_g$  的作用,在拱内产生弯矩、剪力和轴力,各内力的正向如图 1-11 所示。则在恒载作用下,考虑弹性压缩后拱的内力为

$$\left. \begin{aligned} \text{轴向力: } N &= \frac{H_g}{\cos \varphi} - \frac{\mu_1}{1 + \mu} H_g \cos \varphi \\ \text{弯矩: } M &= \frac{\mu_1}{1 + \mu} H_g (y_0 - y) \\ \text{剪力: } Q &= \mp \frac{\mu_1}{1 + \mu} H_g \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (1-92)$$

(上式中,上边符号适用于左半拱,下边符号适用于右半拱)

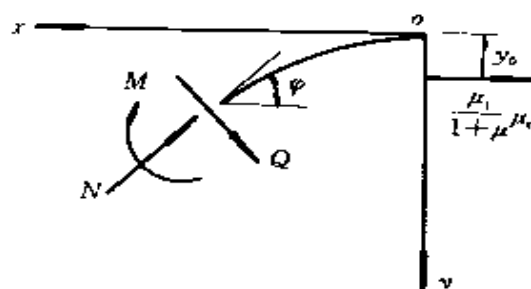


图 1-11  $\Delta H_g$  的作用,在拱内产生的内力

从上式可见,考虑了弹性压缩后,主拱各截面将产生弯矩,例如在拱顶产生正弯矩,该处压力线上移;在拱脚产生负弯矩,压力线下移。即实际的恒载压力线将不可能与拱轴线重合了。

对于跨度较小而矢跨比较大的拱桥,可不计弹性压缩影响。

### 3) 拱轴线偏离恒载压力线的附加内力

众所周知,悬链线空腹拱的拱轴是利用与恒载压力线在拱顶、拱脚及  $l/2$  处五点重合的方法决定的,除此五点外其它各点均与压力线有偏离,使拱内产生附加内力。

设恒载压力线上任意  $i'$  的纵坐标为  $y'$ ,拱轴线上相应点  $i$  的纵坐标为  $y$ ,如图 1-12 所示,则

$$y' = M_i / H_g$$

偏离值为:  $\Delta y = y - y'$

故基本体系中由于拱轴偏离压力线产生的弯矩为

$$M_p = H_g y - M_i = H_g \Delta y$$

由于偏离弯矩  $M_p$  的存在,在无铰拱弹性中心上产生附加赘余力  $X_1$  和  $X_2$ ,其值分别为

$$\begin{aligned}
 X_1 &= -\frac{\Delta_{1M}}{\delta_{11}} = -\frac{\int_s \frac{M_p}{EI_x} ds}{\int_s \frac{ds}{EI_x}} \\
 &= -\frac{\sum_{i=0}^n \frac{M_{pi} \Delta x}{EI_i \cos \varphi}}{\int_0^1 \frac{dx}{EI_x \cos \varphi}} \quad (1-93)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X_2 &= -\frac{\Delta_{2M}}{\delta_{22}} = -\frac{\int_s \frac{(y - y_0) M_p}{EI_x} ds}{\int_s \frac{(y - y_0)^2}{EI_x} ds} \\
 &= -\frac{\sum_{i=0}^n \frac{y_i M_{pi} \Delta x}{EI_i \cos \varphi}}{\int_s \frac{y_i^2 ds}{EI_x}} \quad (1-94)
 \end{aligned}$$

式中:  $n$  ——半跨拱分段数;  
 $\Delta x$  ——分段水平长度。

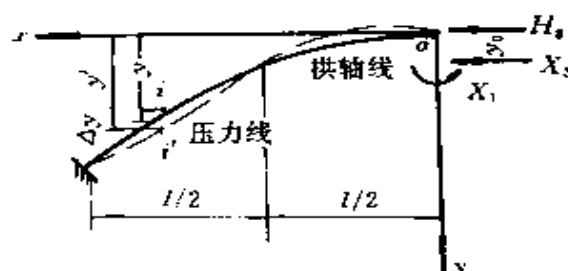


图 1-12 压力线偏离拱轴线情况

由于上面两式的分子不易积分,故改为数值积分求解。

于是,考虑拱轴线偏离恒载压力线时的附加内力为

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta N &= X_2 \cos \varphi \\
 \Delta M &= X_1 + X_2(y + y_0) + H_s \Delta y \\
 \Delta Q &= X_2 \cdot \sin \varphi
 \end{aligned} \right\} \quad (1-95)$$

偏离附加内力的大小与荷载的具体布置有关,一般是拱上腹孔跨度越大,偏离影响也越大。对于大跨度空腹拱桥,应该计算这种偏离影响。

#### 1.4.2 活载内力分析

求无铰拱活载内力时,一般先求出赘余力影响线,然后用叠加方法求出拱的支点反力和控制截面的内力影响线,最后,在内力影响线上加载计算出截面最大内力。为计算方便,还是先不考虑弹性压缩影响,即暂不考虑轴向力对变位的影响,然后再计算弹性压缩影响。

##### 1. 不考虑弹性压缩影响的活载内力

##### (1) 赘余力影响线

为了使积分连续,便于制表,在此采用了简支曲梁作为基本结构,如图 1-13 所示。而图 1-13a)可变换为图 1-13b)及图 1-13c);而

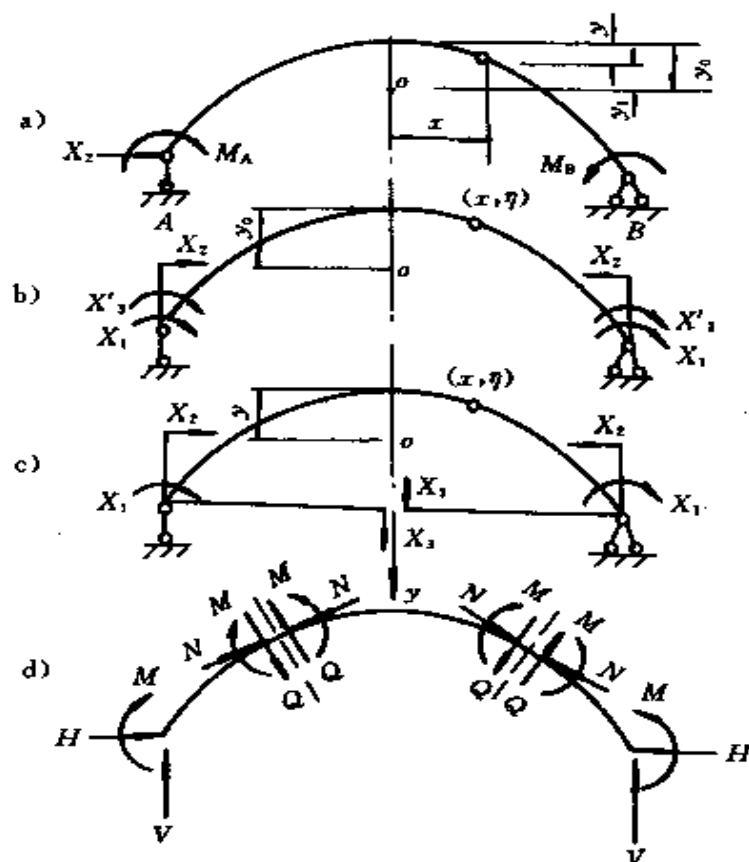


图 1-13 拱的计算基本结构

以图 1-13c) 为计算图式, 图中赘余力  $X_1$ 、 $X_3$  作用在刚性悬臂端点, 并通过弹性中心。设图 1-13d) 所示内、外力方向和与内力同向的变位均为正值。作用在弹性中心的赘余力, 可按下式求算:

$$\left. \begin{aligned} X_1 \delta_{11} + \Delta_{1p} &= 0 & X_1 &= -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} \\ X_2 \delta_{22} + \Delta_{2p} &= 0 & X_2 &= -\frac{\Delta_{2p}}{\delta_{22}} \\ X_3 \delta_{33} + \Delta_{3p} &= 0 & X_3 &= -\frac{\Delta_{3p}}{\delta_{33}} \end{aligned} \right\} \quad (1-96)$$

上式中, 分母部分为弹性中心的常变位值, 分子部分为载变位值。

如暂不考虑轴向力对变位的影响 (即暂不计拱轴弹性压缩影响), 且不计剪力及曲率对变位的影响, 则

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} &= \int_s \frac{\overline{M}_1^2 ds}{EI_x} \\ \delta_{22} &= \int_s \frac{\overline{M}_2^2 ds}{EI_x} \\ \delta_{33} &= \int_s \frac{\overline{M}_3^2 ds}{EI_x} \end{aligned} \right\} \quad (1-97)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{1p} &= \int_s \frac{\overline{M}_1 M_p ds}{EI_x} \\ \Delta_{2p} &= \int_s \frac{\overline{M}_2 M_p ds}{EI_x} \\ \Delta_{3p} &= \int_s \frac{\overline{M}_3 M_p ds}{EI_x} \end{aligned} \right\} \quad (1-98)$$

式中:  $\overline{M}_1$ ——当  $X_1=1$  时, 其在基本结构任意截面上所产生的弯矩,  $\overline{M}_1=1$ ;

$\overline{M}_2$ ——当  $X_2=1$  时, 其在基本结构任意截面所产生的弯矩,  $\overline{M}_2=y-y_0$ ;

$\overline{M}_3$ ——当  $X_3=1$  时, 其在基本结构任意截面所产生的弯矩,  $\overline{M}_3=\pm x$ ;

$M_p$ ——单位荷载作用在基本结构任意截面上所产生的弯矩。

为了简化  $\Delta_{1p}$ 、 $\Delta_{2p}$  和  $\Delta_{3p}$  的计算,可将单位荷载分解为正对称和反对称两组荷载[见图 1-14a)、b)、c)]、并设荷载作用在右半拱。

由于结构的对称性,  $\Delta_{1p}$ 、 $\Delta_{2p}$  只需考虑对称荷载作用下的情况(反对称时为零);而  $\Delta_{3p}$  只需考虑反对称荷载作用下的情况(正对称时为零)。

正对称时:

$$\left. \begin{array}{l} AB \text{ 段} \quad M_p = \frac{1}{2}(l-x) \\ BC \text{ 段} \quad M_p = \frac{l}{2}(1-a) \end{array} \right\} \quad (1-99)$$

反对称时:

$$\left. \begin{array}{l} AB \text{ 段} \quad M_p = \mp \frac{a}{2}(l-x) \\ BC \text{ 段} \quad M_p = \mp \frac{x}{2}(1-a) \end{array} \right\} \quad (1-100)$$

(上边符号适用于左半拱,下边符号适用于右半拱)

将  $\bar{M}_1$ 、 $\bar{M}_2$ 、 $\bar{M}_3$  及  $M_p$  代入常变位及载变位公式(1-97)及(1-98),对于等截面拱有:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \int_s \frac{\bar{M}_1^2 ds}{EI_x} = \int_s \frac{ds}{EI_x} \\ &= \frac{2l}{EI} \int_0^1 \sqrt{1+n^2 \text{sh}^2 k\xi} d\xi \end{aligned}$$

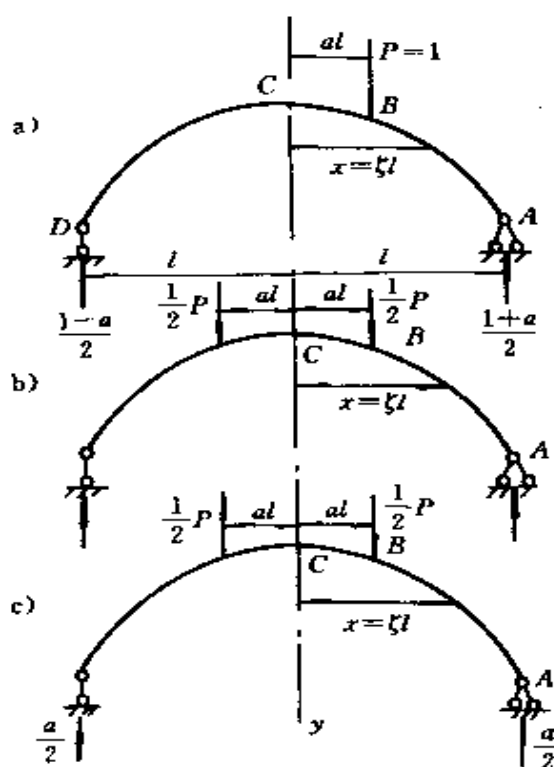


图 1-14 将荷载分解成正、反对称

$$= \frac{2l}{EI} \times \frac{1}{r_1} \quad (1-101)$$

$$\delta_{22} = \int_s \frac{\bar{M}_2^2 ds}{EI_x} = \int_s \frac{(y - y_0)^2}{EI_x} ds$$

根据弹性中心的特性,即

$$\int_s (y - y_0) \frac{ds}{EI_x} = 0$$

则  
故

$$(y_0 + \frac{f}{m-1}) \int_s (y - y_0) \frac{ds}{EI} = 0$$

$$\begin{aligned} \delta_{22} &= \int_s \left[ (y - y_0)^2 + (y - y_0) \left( y_0 + \frac{f}{m-1} \right) \right] \frac{ds}{EI_x} \\ &= \int_s (y - y_0) \left( y_0 + \frac{f}{m-1} \right) \frac{ds}{EI_x} \\ &= \frac{2l}{EI} \int_0^1 \left[ \frac{f}{m-1} (\operatorname{ch} k\xi - 1) - y_0 \right] \\ &\quad \left[ \frac{f}{m-1} \operatorname{ch} k\xi \right] 1 + n^2 \operatorname{sh}^2 k\xi d\xi = \theta \frac{2lf^2}{EI} \end{aligned} \quad (1-102)$$

$$\begin{aligned} \delta_{33} &= \int_s \frac{\bar{M}_3^2 ds}{EI_x} = \int_s \frac{x^2 ds}{EI_x} \\ &= \frac{2l^3}{EI} \int_0^1 \xi^2 (1 + n^2 \operatorname{sh}^2 k\xi d\xi) \\ &= \gamma \frac{2l^3}{EI} \end{aligned} \quad (1-103)$$

以上三式中,  $\frac{1}{\gamma}$ 、 $\theta$ 、 $\gamma$  值可分别自公路设计手册《拱桥》下册附录

(III)表(III)-8、(III)-5 和(III)-6 查得,  $L \times \frac{1}{\gamma}$  = 拱轴长度  $s$ 。

$$\begin{aligned} \Delta_{1p} &= \int_s \frac{\bar{M}_1 M_p}{EI_x} ds \\ &= \frac{(1-a)l^2}{EI} \int_0^1 1 + n^2 \operatorname{sh}^2 k\xi d\xi \\ &\quad + \frac{l^2}{EI} \int_s (1 - \xi) (1 + n^2 \operatorname{sh}^2 k\xi d\xi) \end{aligned} \quad (1-104)$$

$$\Delta_{2p} = \int_s \frac{\bar{M}_2 M_p}{EI_x} ds$$

$$= \frac{l^2}{EI} \left\{ (1-a) \int_0^a \left[ \frac{f}{m-1} (\operatorname{ch} k\xi - 1) - y_0 \right] \right. \\ \left. \times \sqrt{1+n^2 \operatorname{sh}^2 k\xi} d\xi + \int_a^1 \left[ \frac{f}{m-1} (\operatorname{ch} k\xi - 1) \right. \right. \\ \left. \left. - y_0 \right] (1-\xi) \sqrt{1+n^2 \operatorname{sh}^2 k\xi} d\xi \right\} \quad (1-105)$$

$$\Delta_{3p} = \int_s \frac{\bar{M}_3 M_p}{EI_x} ds \\ = - \frac{l^3 (1-a)}{EI} \int_0^a \xi^2 \sqrt{1+n^2 \operatorname{sh}^2 k\xi} d\xi \\ - \frac{l^3 a}{EI} \int_a^1 \xi (1-\xi) \sqrt{1+n^2 \operatorname{sh}^2 k\xi} d\xi \quad (1-106)$$

当荷载  $P=1$  作用于不同位置时,即可利用上式分别求出赘余力  $X_1$ 、 $X_2$ 、 $X_3$  的各点影响线坐标,其图形如图 1-15 所示。

## (2) 支点反力和内力影响线

求得赘余力影响线后,拱脚支点反力以及任意截面的内力影响线,可利用静力平衡条件和叠加方法求得。

### ① 水平推力影响线

由  $\sum x=0$ , 得水平推力  $H_1=X_2$ , 即  $H_1$  的影响线为赘余力  $X_2$  的影响线,其坐标值可查公路设计手册《拱桥》下册附录(III)表、(III)-12。

### ② 拱脚竖直反力影响线

由  $\sum y=0$ , 得竖直反力  $V=V_0 \mp X_3$  (上边符号适用于左

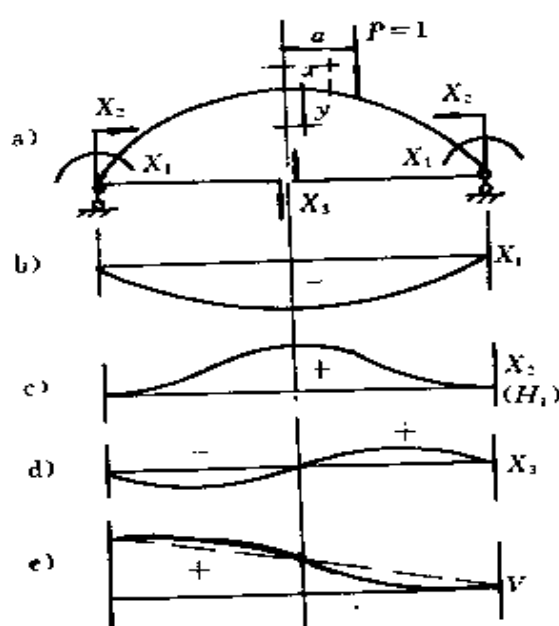


图 1-15 赘余力影响线

半拱,下边符号适用于右半拱),式中的  $V_0$  为简支梁反力。故  $V$  的影响线由  $V_0$  与赘余力  $X_3$  两条影响线叠加而成,其形式可见图 1-15e)。各点影响线坐标可查公路设计手册《拱桥》下册附录(III)表(III)-7。

### ③任意截面的内力影响线

由图 1-15a)可知,任意截面的内力为

$$\left. \begin{aligned} \text{弯矩: } M &= \bar{M} - H_1 y \pm X_3 x + X_1 \\ \text{轴向力: } N &= Q_b \sin \varphi + H_1 \cos \varphi \\ \text{径向剪力: } Q &= \pm H_1 \sin \varphi - Q_b \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (1-107)$$

式中:  $\bar{M}$ ——简支梁弯矩;

$Q_b$ ——作用于截面以左的竖直外力总和,称梁式剪力;正值表示向上,负值表示向下;当单位荷载在截面左边时:  $Q_b = V_{\text{左}} - 1$ ;当单位荷载在截面右边时:  $Q_b = V_{\text{左}}$ ;  $V_{\text{左}}$  为拱左支承竖直反力。

式(1-107)中上边符号适用于左半拱,下边符号适用于右半拱。

根据式(1-107)可叠加求得拱任意截面的内力影响线,其形状可见图 1-16。

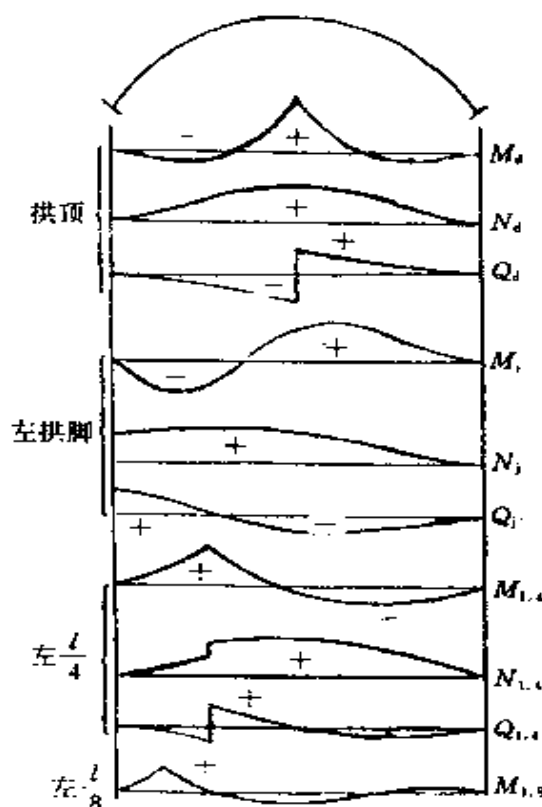


图 1-16 拱任意截面内力影响线



在实际计算中,任意截面的轴向力  $N$  和剪力  $Q$  一般不作影响线,而利用推力  $H_1$  和竖直反力  $V$  的影响线求得:

$$\begin{aligned} \text{轴向力} & \begin{cases} \text{拱顶: } N = H_1 \\ \text{拱脚: } N = V \sin \varphi_1 + H_1 \cos \varphi_1 \\ \text{其它截面: } N \approx H_1 / \cos \varphi_x \end{cases} \\ \text{剪力} & \begin{cases} \text{拱顶: 数值很小,一般不计} \\ \text{拱脚: } Q = H_1 \sin \varphi_1 - V \cos \varphi_1 \\ \text{其它截面: 数值较小,一般不计} \end{cases} \end{aligned}$$

以上公式是根据单位荷载作用于右半拱推导出来的,如单位荷载作用在左半拱,则  $\Delta_{3p}$  的公式要变号。

### (3) 活载内力计算

有了内力影响线之后,即可按最不利荷载位置布载,以求得最大内力。

#### 2. 活载作用下弹性压缩引起的内力

与求恒载弹性压缩影响的原理相同,活载轴向力引起拱轴沿跨径方向的变位  $\Delta L$ ,为了平衡此弹性压缩,必须在弹性中心上施加一方向向外的水平拉力  $\Delta H$ 。因而考虑弹性压缩后拱的活载推力为

$$H = H_1 - \Delta H \quad (1-108)$$

式中  $H_1$  为考虑弹性压缩的活载推力,  $\Delta H$  按下式计算:

$$\Delta H = \frac{\Delta L}{\delta_{22}} = \frac{\int_s \frac{N ds}{EA_x} \cos \varphi}{\delta_{22}} \quad (1-109)$$

在竖直力  $P$  的作用下,拱任意截面上产生轴向力  $N$ 、弯矩  $M$  和剪力  $Q$ (图 1-17)。将所有的力均投影在水平方向,则轴向力为

$$N = \frac{H_1 - Q \sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{H_1}{\cos \varphi} \left[ 1 - \frac{Q}{H_1} \sin \varphi \right] \quad (1-110)$$

略去  $\frac{Q}{H_1} \sin \varphi$  项,得

$$N = \frac{H_1}{\cos \varphi} \quad (1-111)$$

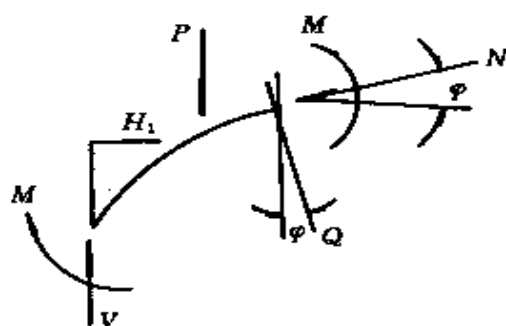


图 1-17 拱任意截面在坚直力作用下产生的内力

于是

$$\begin{aligned}\Delta H &= \frac{H_1 \int_{-1}^1 \frac{dx}{EA_x \cos \varphi}}{\delta_{22}} \\ &= \frac{H_1 \int_{-1}^1 \frac{dx}{EA_x \cos \varphi}}{(1 + \mu) \int_s \frac{y_1^2 ds}{EI_x}} \\ &= H_1 \frac{\mu_1}{1 + \mu}\end{aligned}\quad (1-112)$$

式中  $\mu$  和  $\mu_1$  同公式(1-90)及(1-91)。

由于弹性压缩引起的内力为

$$\left. \begin{aligned}\text{弯矩: } \Delta M &= \Delta H y_1 = \frac{\mu_1}{1 + \mu} H_1 y_1 \\ \text{轴向力: } \Delta N &= -\Delta H \cos \varphi = -\frac{\mu_1}{1 + \mu} H_1 \cos \varphi \\ \text{剪力: } \Delta Q &= \mp \Delta H \sin \varphi = \mp \frac{\mu_1}{1 + \mu} H_1 \sin \varphi\end{aligned}\right\} \quad (1-113)$$

(上边符号适用于左半拱,下边符号适用于右半拱)

将不考虑弹性压缩的活载内力与活载弹性压缩产生的内力叠加起来,即得活载作用下的总内力。

### 1.4.3 温度变化和混凝土收缩产生的内力

大气的年温差对超静定拱将产生附加内力。

年温差指气温一年四季的变化,变化的幅度较大,时间较长。对一般拱桥来说,主拱与大气间热传导于几小时内即完成,因而年

温差对主拱温度的影响,可认为主拱温度均匀地随气温的升降而升降。则其引起的内力计算,与计算弹性压缩的概念一样,设温度变化引起跨径方向的变位为  $\Delta l_1$ ,为消除这一变位就必须在弹性中心施加一水平推力  $H_1$ (见图 1-18)。

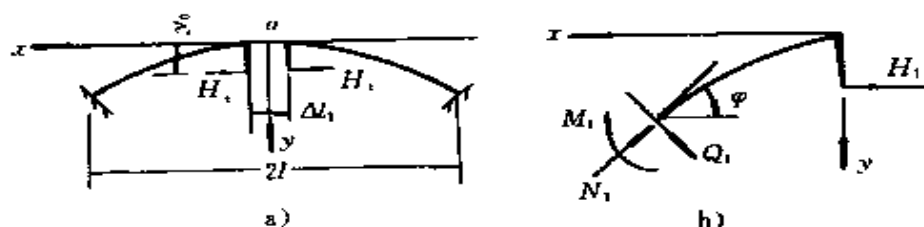


图 1-18 温差内力计算图式

显然,温度上升时,  $H_1$  为正(向内作用);温度下降时,  $H_1$  为负(向外作用)则  $H_1$  为

$$H_1 = \frac{\Delta l_1}{\delta_{22}} = \frac{2\alpha l(t_2 - t_1)}{(1 + \mu) \int_0^s \frac{y_1^2 ds}{EI}} \quad (1-114)$$

式中:  $\alpha$ ——材料的线膨胀系数,混凝土或钢筋混凝土为  $10^{-5}/^\circ\text{C}$ ,  
石砌体为  $0.8 \times 10^{-5}/^\circ\text{C}$ ;

$t_1$ ——封拱(或称合拢)时的温度;

$t_2$ ——当地最高或最低月平均气温;

$\mu$ ——弹性压缩系数。

考虑到混凝土徐变影响,如缺乏实际资料时可在式(1-114)中乘以 0.7 的折减系数。

由于  $H_1$  的作用,拱各截面的内力为(图 1-18b)

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -H_1 y_1 = -H_1 (y_0 - y) \\ M_1 &= H_1 \cos \varphi \\ Q_1 &= \pm H_1 \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (1-115)$$

(式中上边符号适用于左半拱,下边符号适用于右半拱)

应该指出,温度内力的大小与合拢温度有密切关系,应选择适宜的合拢温度。考虑到混凝土收缩,宜使升温幅度稍大于降温幅度。

#### 1.4.4 裸拱内力分析(悬链线拱)

在拱桥搭架施工的过程中,为了提高拱架的周转率,往往在主拱圈封拱合拢达到一定强度后,就卸落拱架。在无支架施工中,亦存在裸拱状态。这时,须计算拱圈自重作用下的内力。

在拱圈自重作用下(不考虑拱上建筑),其压力线与拱轴线是不符合的,在拱内将产生弯矩和轴向力,计算时可采用悬臂曲梁为基本结构,则在弹性中心作用的弯矩  $M_s$  和水平力  $H_s$  (图 1-19)为

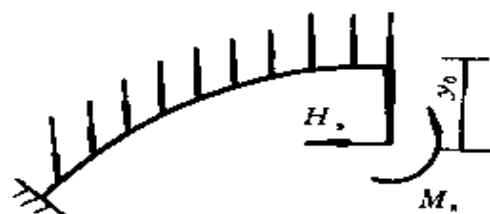


图 1-19 拱圈自重内力计算

$$M_s = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = -\frac{\int_s \frac{M_1 M_p ds}{EI_x}}{\int_s \frac{M_1^2 ds}{EI_x}} = -\frac{\int_s \frac{M_p ds}{EI_x}}{\int_s \frac{ds}{EI_x}}$$

$$H_s = -\frac{\Delta_{2p}}{\delta_{22}} = -\frac{\int_s \frac{M_p y_1 ds}{EI_x}}{(1 + \mu) \int_s \frac{y_1^2 ds}{EI_x}} \quad (1-116)$$

将上两式展开可得(对于等截面拱):

$$\left. \begin{aligned} M_s &= A\gamma l^2 V_1 \\ H_s &= \frac{A\gamma l^2}{(1 + \mu)f} V_2 \end{aligned} \right\} \quad (1-117)$$

式中:  $A$ ——拱圈截面积;

$\gamma$ ——拱圈材料容重;

$V_1$ 、 $V_2$ ——系数,可自公路设计手册《拱桥》下册表(III)-15、16 查得。

拱圈任意截面在自重作用下的弯矩和轴向力为

$$\left. \begin{aligned} M_i &= M_s - H_s(y_0 - y) - \sum_{12}^i M \\ N_i &= H_s \cos \varphi_i + \sin \varphi_i \sum_{12}^i P \end{aligned} \right\} \quad (1-118)$$

式中： $\sum_{12}^i M$ ——拱顶至拱任意截面间拱圈自重对该截面的弯矩，  
可查公路设计手册《拱桥》下册表(III)-19；

$\sum_{12}^i P$ ——拱顶至拱任意截面间拱圈自重的总和，可查公路  
设计手册《拱桥》下册表(III)-19。

## 第二章 挠度理论的基本方程

### 2.1 基本假定

推导拱的平衡方程式,基于平面变形假定,即法线方向与切线方向的夹角在变形前后保持不变。

在考虑竖向变形影响来分析拱轴内力时,将无铰拱的三个赘余力简化到弹性中心上,且此时认为弹性中心位置还是未变形前的弹性中心位置,而不计拱轴变形引起弹性中心的改变量。

根据拱桥荷载的特点及目前预计习惯,还将恒载作用和外载作用分别考虑,然后叠加求得总内力。这样处理虽附合加载顺序及设计习惯,但却不符合非线性理论的一般规律,故在计算时,若有必要,应将恒、活载作用同时考虑,一起计算。止于这样处理所带来的误差在以后的分析中将会慢慢领会。

桥梁的恒载挠度一般由施工所设的反向预拱度所克服,但这并不意味着恒载就不产生挠度,而只是所计算的原始轴线坐标有微小的改变,竖向挠度对内力的影响这一基本事实仍然存在,用挠度理论来分析恒载内力,并不失一般意义。

对于“合理拱轴线”恒载在拱中不产生弯矩和剪力这一概念,是在不计弹性压缩(即轴向变位对微分方程的贡献)影响的情况下才成立,在挠度理论分析中,由于轴向变位直接参于分析,故“合理拱轴线”这一概念已对分析过程和方法不产生影响,而只影响最终的数值结果。所以在挠度理论分析中,将不再使用“合理拱轴线”这一概念,但这并不意味着拱桥设计时不应使用合理拱轴线。

## 2.2 曲线坐标下的基本方程

如图 2-1 所示的曲线坐标  $(s, r)$ , 其中  $s$  为拱轴切线方向,  $r$  为其法线方向。

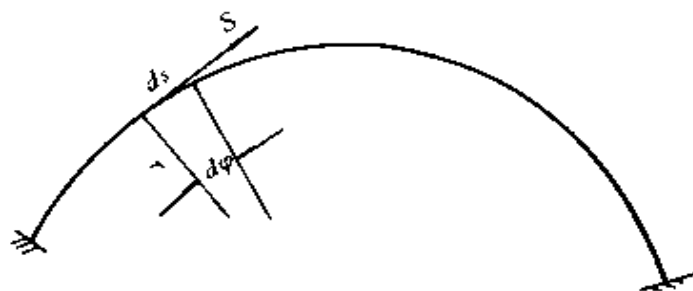


图 2-1 拱轴曲线坐标

从拱轴线上取出一微段  $\widehat{mn} = ds$ , 以下来建立其基本方程

### 2.2.1 几何方程

图 2-2 表示拱微元  $\widehat{mn}$  在平面挠曲变形后位移至新位置  $\widehat{m'n'}$ 。 $u$  表示沿轴线切线方向的位移, 以顺时针方向为正;  $v$  表示法线方向的位移, 以指向极点为正。

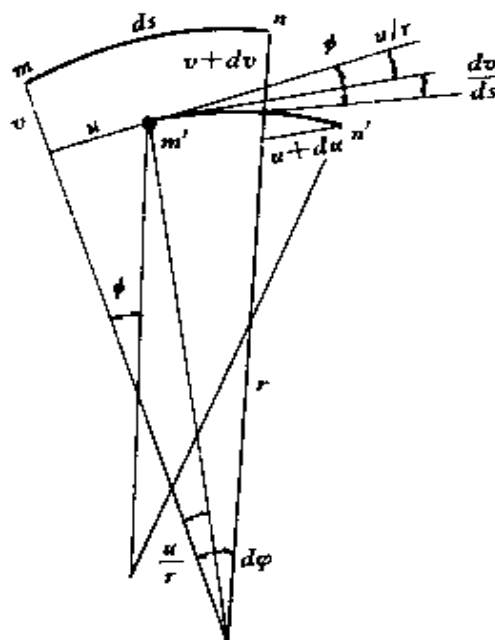


图 2-2 拱轴微元的变形

由此图可知,微段 $\widehat{mn}$ 的轴向变形可分解为两项:一是沿轴向的伸长量 $u + du - u = du$ ,另一项是由于竖向挠曲引起拱轴的缩短 $\Delta du$ , $\Delta du = rd\varphi - (r - v)d\varphi = vd\varphi = \frac{v}{r}ds$ ,则此微段的轴向应变为:

$$\epsilon = \frac{du - \frac{v}{r}ds}{ds} = \frac{du}{ds} - \frac{v}{r} \quad (2-1)$$

由位移 $v$ 在截面 $m$ 所引起的转角为 $\frac{dv}{ds}$ ;由 $u$ 所引起的转角为 $u/(r + v)$ ,可近似地取 $u/r$ ,所以 $v$ 和 $u$ 的共同影响下截面的转角为:

$$\phi = \frac{dv}{ds} + \frac{u}{r} \quad (2-2)$$

微段曲率的改变量即单位长度转角的增量为:

$$\begin{aligned} K &= \frac{d\phi}{ds} = \frac{d}{ds} \left( \frac{dv}{ds} + \frac{u}{r} \right) \\ &= \frac{d^2v}{ds^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{ds} \end{aligned} \quad (2-3)$$

令沿法线方向( $r$ 方向)距拱轴线为 $z$ 的点 $p$ 沿法线方向和切线方向的位移分别为 $v_p$ 和 $u_p$ ,则当轴线发生转角 $\phi$ 时(式2-2),由图2-3所示的几何关系有:

$$\begin{cases} u_p = z\phi + u \\ v_p = v \end{cases} \quad (2-4)$$

将式(2-4)代入式(2-1),得拱截面上任一点的正应变表达式为:

$$\begin{aligned} \epsilon_p &= \frac{du_p}{ds} - \frac{v_p}{r} \\ &= \frac{d}{ds}(z\phi + u) - \frac{v}{r} \end{aligned}$$

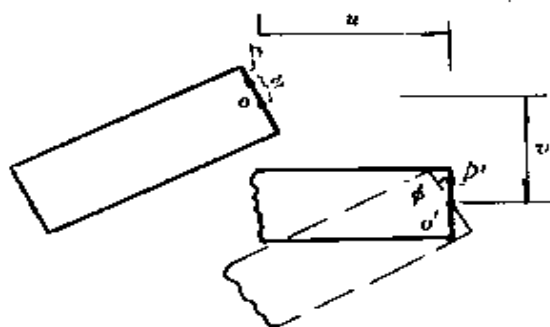


图 2-3 拱圈截面上任意点的变形



$$\begin{aligned}
&= z \frac{d\phi}{ds} + \frac{du}{ds} - \frac{v}{r} \\
&= zK + \epsilon
\end{aligned} \tag{2-5}$$

### 2.2.2 内力合成

根据虎克定律,拱截面上任一点的正应力  $\sigma_p$  和正应变  $\epsilon_p$  有如下关系:

$$\sigma_p = E\epsilon_p \tag{2-6}$$

式中  $E$  为拱圈材料弹性模量。由  $\sigma_p$  合成截面上的弯矩  $M$  和轴力  $N$  (在此忽略剪力的影响), 规定轴力  $N$  以使拱截面受压为正, 弯矩  $M$  以使拱截面下缘纤维受拉为正, 则有:

$$\begin{aligned}
N &= - \int_A \sigma_p dA_x \\
&= - \int_A E\epsilon_p dA_x \\
&= - E \int_A (zK + \epsilon) dA_x
\end{aligned} \tag{2-7}$$

注意到:  $K, \epsilon$  均与  $A_x, z$  无关, 且拱轴线过截面重心, 则:

$$\int_A z dA_x = 0 \quad \int_A dA_x = A_x \tag{2-8}$$

$$\therefore N = -EA\epsilon$$

而弯矩  $M$  为:

$$\begin{aligned}
M &= - \int_A \sigma_p z dA_x \\
&= - \int_A E\epsilon_p z dA_x \\
&= - \int_A Ez(zK + \epsilon) dA_x
\end{aligned} \tag{2-9}$$

注意到  $\int_A z^2 dA_x = I_x$ , 为拱圈截面抗弯惯矩, 则:

$$\begin{aligned}
M &= -EI_x K \\
&= -EI_x \frac{d\phi}{ds}
\end{aligned} \tag{2-10}$$

### 2.2.3 平衡方程

联立(3-1)、(3-2)两式解得:

$$\begin{cases} r^2 \frac{d^2 u}{ds^2} - r^2 \frac{d\epsilon}{ds} + u - r\phi = 0 \\ r^2 \frac{d^2 v}{ds^2} - r^2 \frac{d\phi}{ds} + v + r\epsilon = 0 \end{cases} \quad (2-11)$$

将式(2-8)、(2-10)代入式(2-11)中有:

$$\begin{cases} r^2 \frac{d^3 u}{ds^3} + r^2 \frac{d}{ds} \left( \frac{N}{EA_x} \right) + \frac{du}{ds} + r \frac{M}{EI_x} = 0 \\ r^2 \frac{d^2 v}{ds^2} + r^2 \frac{M}{EI_x} + v + r \frac{N}{EA_x} = 0 \end{cases} \quad (2-12)$$

## 2.3 极坐标下的基本方程

以  $w$  表示竖直方向的位移(向下为正),  $\delta$  表示水平方向的位移(向右为正) 则

### 2.3.1 几何方程

如图 2-4 所示的几何关系有

$$\begin{cases} u = \delta \cos \varphi - w \sin \varphi \\ v = \delta \sin \varphi + w \cos \varphi \end{cases} \quad (2-13)$$

将式(2-13)代入式(2-1)、(2-2)分别有:

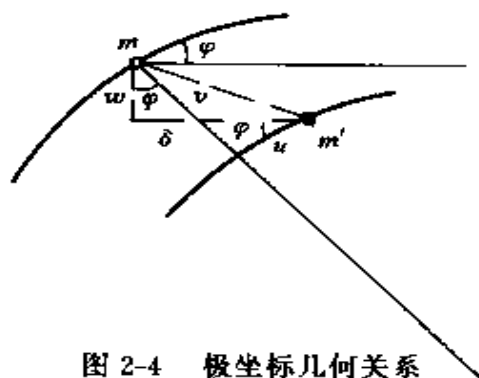


图 2-4 极坐标几何关系

$$\begin{aligned} \epsilon = & \frac{d}{ds} (\delta \cos \varphi - w \sin \varphi) \\ & - \frac{\delta \sin \varphi + w \cos \varphi}{r} \end{aligned} \quad (2-14)$$

$$\phi = \frac{d}{ds} (\delta \sin \varphi + w \cos \varphi) + \frac{\delta \cos \varphi - w \sin \varphi}{r} \quad (2-15)$$

在极坐标中,极角的起点从水平右方向算起,并以顺时针为正,则  $\phi$  和极角  $\theta$  有如下关系

$$\begin{cases} \cos \varphi = \sin \theta \\ \sin \varphi = \cos \theta \end{cases} \quad (2-16)$$

将式(2-16)代入式(2-14)、(2-15)中并展开化简有:

$$\epsilon = \frac{1}{r} \left( \frac{d\delta}{d\theta} \sin\theta - \frac{dw}{d\theta} \cos\theta \right) \quad (2-17)$$

$$\phi = \frac{1}{r} \left( \frac{d\delta}{d\theta} \cos\theta + \frac{dw}{d\theta} \sin\theta \right) \quad (2-18)$$

### 2.3.2 内力合成

同 2.2.2。

### 2.3.3 平衡方程

解式(2-17)、(2-18)有:

$$\frac{1}{r} \frac{1}{\sin^2\theta} \left( \frac{d^2w}{d\theta^2} \sin\theta - \frac{dw}{d\theta} \cos\theta \right) = \frac{d\phi}{d\theta} - \frac{d\epsilon}{d\theta} \operatorname{ctg}\theta + \epsilon \operatorname{csc}^2\theta \quad (2-19)$$

$$\frac{1}{r} \frac{1}{\cos^2\theta} \left( \frac{d^2\delta}{d\theta^2} \cos\theta + \frac{d\delta}{d\theta} \sin\theta \right) = \frac{d\phi}{d\theta} + \frac{d\epsilon}{d\theta} \operatorname{tg}\theta + \epsilon \sec^2\theta \quad (2-20)$$

将式(2-8)、(2-10)代入式(2-19)、(2-20)并整理有

$$\frac{1}{r} \left( \frac{d^2\delta}{d\theta^2} + \frac{d\delta}{d\theta} \operatorname{tg}\theta \right) = -r \frac{M}{EI} \cos\theta - \frac{d}{d\theta} \left( \frac{N}{EA_x} \right) \sin\theta - \frac{N}{EA_x} \sec\theta \quad (2-21)$$

$$\frac{1}{r} \left( \frac{d^2w}{d\theta^2} - \frac{dw}{d\theta} \operatorname{ctg}\theta \right) = -r \frac{M}{EI_x} \sin\theta + \frac{d}{d\theta} \left( \frac{N}{EA_x} \right) \cos\theta - \frac{N}{EA_x} \cos\theta \quad (2-22)$$

$$\phi = \frac{dw}{d\theta} \frac{1}{r \sin\theta} - \frac{N}{EA} \operatorname{ctg}\theta \quad (2-23)$$

## 2.4 直角坐标系下的基本方程

取如图 2-5 所示的直角坐标系( $x o y$ )。

### 2.4.1 几何方程

在拱轴线上取一微段 $\widehat{mn} = ds$ ,它在 $x$ 轴、 $y$ 轴上的投影为 $dx$ 、 $dy$ , $\widehat{mn}$ 与水平轴的夹角为 $\varphi$ 。

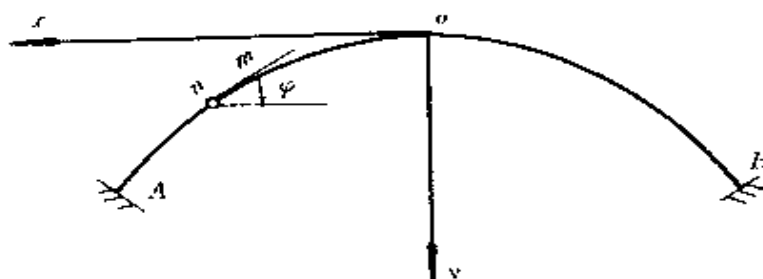


图 2-5 直角坐标系

设  $m$  点坐标为  $m(x, y)$ , 则  $n$  点坐标可以写为  $n(x + dx, y + dy)$ ,  $mn$  的方向余弦为 (图 2-6 所示)。

$$\left. \begin{aligned} l &= \cos(mn, x) = \cos \alpha \\ n &= \cos(mn, y) = \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (2-24)$$

于是:

$$\left. \begin{aligned} dx &= \cos \alpha ds \\ dy &= \sin \alpha ds \end{aligned} \right\} \quad (2-25)$$

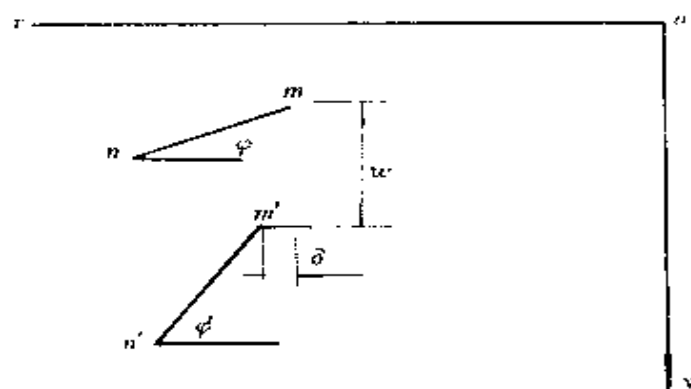


图 2-6 几何关系

设  $m$  点沿  $x, y$  方向位移分别  $\delta, w$ , 则  $n$  点位移分量为:

$$\left. \begin{aligned} \delta_n &= \delta + d\delta \\ w_n &= w + dw \end{aligned} \right\} \quad (2-26)$$

变形后  $mn$  成为  $m'n'$ , 则  $m'n'$  在坐标轴上的投影为

$$\left. \begin{aligned} dx + \delta_n - \delta &= dx + d\delta \\ dy + w_n - w &= dy + dw \end{aligned} \right\} \quad (2-27)$$

以  $\epsilon$  表示  $mn$  的正应变, 则  $\epsilon = (1 + \epsilon)ds$ , 而  $m'n'$  的平方就等于式(2-27)中两个投影的平方和, 即:

$$[ds(1 + \epsilon)]^2 = (dx + d\delta)^2 + (dy + dw)^2$$

两边同除以  $ds^2$  并注意到式(3-15)有:

$$(1 + \epsilon)^2 = \left( \cos\alpha + \frac{d\delta}{ds} \right)^2 + \left( \sin\alpha + \frac{dw}{ds} \right)^2 \quad (2-28)$$

若略去  $\epsilon, \frac{d\delta}{ds}, \frac{dw}{ds}$  二阶以上高阶微量, 可得:

$$\epsilon = \frac{d\delta}{ds} \cos\alpha + \frac{dw}{ds} \sin\alpha \quad (2-29)$$

为求得转角  $\phi$ , 设  $m'n'$  与水平轴的夹角为  $\varphi_1$ , 则  $m'n'$  的方向余弦为:

$$\begin{cases} l_1 = \cos\varphi_1 = \frac{dx + d\delta}{ds(1 + \epsilon)} \\ m_1 = \sin\varphi_1 = \frac{dy + dw}{ds(1 + \epsilon)} \end{cases} \quad (2-30)$$

注意到  $\epsilon$  是微量, 因此:

$$\frac{1}{1 + \epsilon} = 1 - \epsilon + \epsilon^2 - \dots = 1 - \epsilon$$

则:

$$\begin{cases} l_1 = l(1 - \frac{d\delta}{dx})(1 - \epsilon) \\ m_1 = m(1 + \frac{dw}{dx})(1 - \epsilon) \end{cases} \quad (2-31)$$

于是有:

$$\begin{aligned} \sin\phi &= \sin(\varphi_1 - \varphi) \\ &= (1 - \epsilon) \left( \frac{dw}{ds} \cos\varphi - \frac{d\delta}{ds} \sin\varphi \right) \end{aligned} \quad (2-32)$$

对于小变形:  $\epsilon \ll 1, 1 - \epsilon =$

1  $\phi = \sin\phi$

$$\therefore \phi = \frac{dw}{ds} \cos\varphi - \frac{d\delta}{ds} \sin\varphi \quad (2-33)$$

在图 2-3 中, 令  $p$  点的位移分量为  $\delta_p, w_p$ , 由图 2-7 所示的几何关系有:

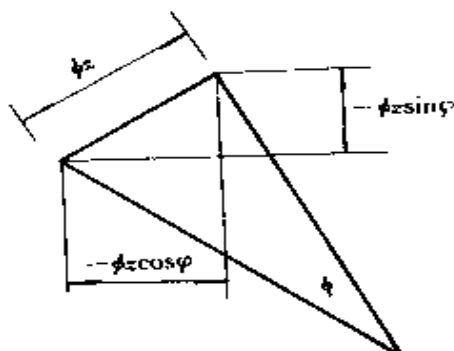


图 2-7  $\phi$  与  $\delta_p$  及  $w_p$  的关系

$$\left. \begin{aligned} \delta_v &= \delta - \phi Z \cos \varphi \\ w_p &= w - \phi Z \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (2-34)$$

将式(2-34)代入式(2-29)可得到拱截面上任一点的正应变表达式为:

$$\epsilon_p = \frac{d\delta}{ds} \cos \varphi + \frac{dw}{ds} \sin \varphi - Z \frac{d\phi}{ds} \quad (2-35)$$

## 2.4.2 内力合成

同 2.2.2

## 2.4.3 平衡方程

由式(2-29)、(2-30)、(2-7)、(2-10)解得

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\delta}{dx} &= -\frac{dw}{dx} \frac{dy}{dx} - \frac{N}{EA_x} (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) \\ \frac{d^2 w}{dx^2} &= -\frac{M}{EI_x} \sec \varphi - \frac{d}{dx} \left( \frac{N}{EA_x} \operatorname{tg} \varphi \right) \\ \phi &= \frac{dw}{dx} + \frac{N}{EA} \operatorname{tg} \varphi \end{aligned} \right. \quad (2-36)$$

## 2.5 考虑剪力及温度影响时的平衡方程(直角坐标系)

现在从另一角度来推导在直角坐标系下考虑剪力及温度影响时拱的平衡方程。

从如图 2-8 所示任意轴线拱中的取出微元  $mn$ , 设  $m$  点的水平位移为  $\delta$ , 竖向位移为  $w$ , 则  $n$  点的水平位移为  $\delta + d\delta$ , 竖向位移为  $w + dw$ 。位移的增量  $d\delta$  和  $dw$  是由于转角  $\phi$  和长度的增量  $\epsilon ds$  ( $\epsilon$  同样为轴向应变) 所引起的。分别示于图 2-8c)、d) 中, 即:

$$\begin{aligned} d\delta &= d\delta_1 + d\delta_2 = \phi ds \sin \varphi + \epsilon ds \cos \varphi \\ &= \phi dy + \epsilon dx \end{aligned} \quad (2-37)$$

$$\begin{aligned} dw &= dw_1 - dw_2 = \phi ds \cos \varphi - \epsilon ds \sin \varphi \\ &= \phi dx - \epsilon dy \end{aligned} \quad (2-38)$$

由(2-37)、(2-38)两式可得:

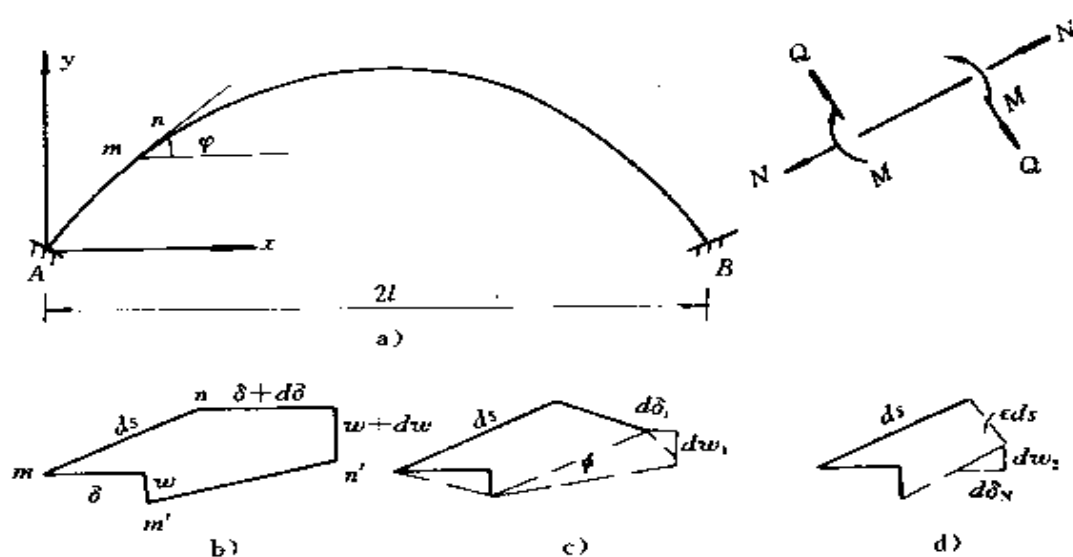


图 2-8 直角坐标系

$$\frac{d\delta}{dx} = \epsilon + \phi \operatorname{tg} \varphi \quad (2-39)$$

$$\frac{dw}{dx} = \phi - \epsilon \operatorname{tg} \varphi \quad (2-40)$$

由式(2-40)得:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{d\phi}{dx} - \frac{d}{dx}(\epsilon \cdot \operatorname{tg} \varphi) \quad (2-41)$$

按材料力学公式有:

$$\frac{d\phi}{dx} = -\frac{M}{EI_x} + \frac{d}{ds}\left(\frac{\alpha Q}{GA_x}\right) \quad (2-42)$$

$$\begin{aligned} \text{则} \quad \frac{d\phi}{dx} &= \frac{1}{\cos \varphi} \frac{d\phi}{ds} \\ &= -\frac{M}{EI_x \cos \varphi} + \frac{d}{dx}\left(\frac{\alpha Q}{GA_x}\right) \end{aligned} \quad (2-43)$$

$$\epsilon = \epsilon_t + \frac{N}{EA_x} \quad (\text{受拉为正时, } t > 0) \quad (2-44)$$

将式(2-43)、(2-44)代入式(2-41)中有:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M}{EI_x \cos \varphi} - \frac{d}{dx}\left(\epsilon + \frac{N}{EA_x} \operatorname{tg} \varphi\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{\alpha Q}{GA_x}\right) \quad (2-45)$$

将式(2-40)代入式(2-39), 消去  $\phi$  可得水平位移  $\delta$  与竖向位移  $w$  之间的关系式为

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{dw}{dx} \frac{dy}{dx} + (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) \varepsilon$$

即 
$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{dw}{dx} \frac{dy}{dx} + \left( \varepsilon_1 + \frac{N}{EA_x} \right) (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) \quad (2-46)$$

比较式(2-45)与式(2-36)中的第二式;式(2-40)与式(2-36)中的第一式,并注意到坐标向和正负号规定的不同,当不计温度( $\varepsilon_1 = 0$ )和剪力影响时,则其表达式是完全一致的。

如果不计温度变化影响,且不计轴向力影响,同时忽略剪力对位移的影响,则式(2-45)和式(2-46)将分别简化为:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = - \frac{M}{EI_x \cos \varphi} \quad (2-47)$$

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{dw}{dx} \operatorname{tg} \varphi \quad (2-48)$$

此即为弹性理论基本方程。

## 2.6 固端拱的位移条件

对于拱脚固定的无铰拱,两拱脚的水平位移和竖向位移为零,则由式(2-46)可得

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \int_0^x d\delta + B \quad (B \text{ 为积分常数}) \\ &= \int_0^x w' y' dx + \int_0^x (1 + y'^2) \left( \varepsilon_1 + \frac{N}{EA} \right) dx + B \\ &= w y' \Big|_0^x - \int_0^x w y'' dx + \int_0^x (1 + y'^2) \\ &\quad \times \left( \varepsilon_1 + \frac{N}{EA} \right) dx + B \end{aligned}$$

在支点 A 处,有边界条件  $x = 0$  时,  $\delta_A = w_A = 0$ ,则由上式可知  $B = 0$ ,现在将积分中的自变量改用  $t$ ,则:

$$\delta(x) = w \cdot y' - \int_0^x w y'' dt + \int_0^x (1 + y'^2) \left( \varepsilon_1 + \frac{N}{EA_x} \right) dt \quad (2-49)$$

又由支点 B 处的边界条件,  $x = 2l$  时,  $\delta_B = w_B = 0$ ,有:



$$-\int_0^{2l} w y'' dt + \int_0^{2l} (1 + y'^2) \left( \epsilon_t + \frac{N}{EA_x} \right) dt = 0$$

换回自变量,得:

$$-\int_0^{2l} w y'' dx + \int_0^{2l} (1 + y'^2) \left( \epsilon_t + \frac{N}{EA_x} \right) dx = 0 \quad (2-50)$$

没有温度变化,并不计轴向力的对变形的影响时,式(2-50)可简化为:

$$-\int_0^{2l} w y'' dx = 0 \quad (2-51)$$

## 2.7 控制方程的建立

### 2.7.1 基本结构

取简支曲梁作为挠度理论分析时的基本结构,如图 2-9 所示,将荷载作用下的超静定赘余力转化为弹性中心上的三个赘余力,在恒载作用下分别为  $H_g$ 、 $M_g$  和  $Q_g$ ;在活载作用下分别为  $H_x$ 、 $M_x$

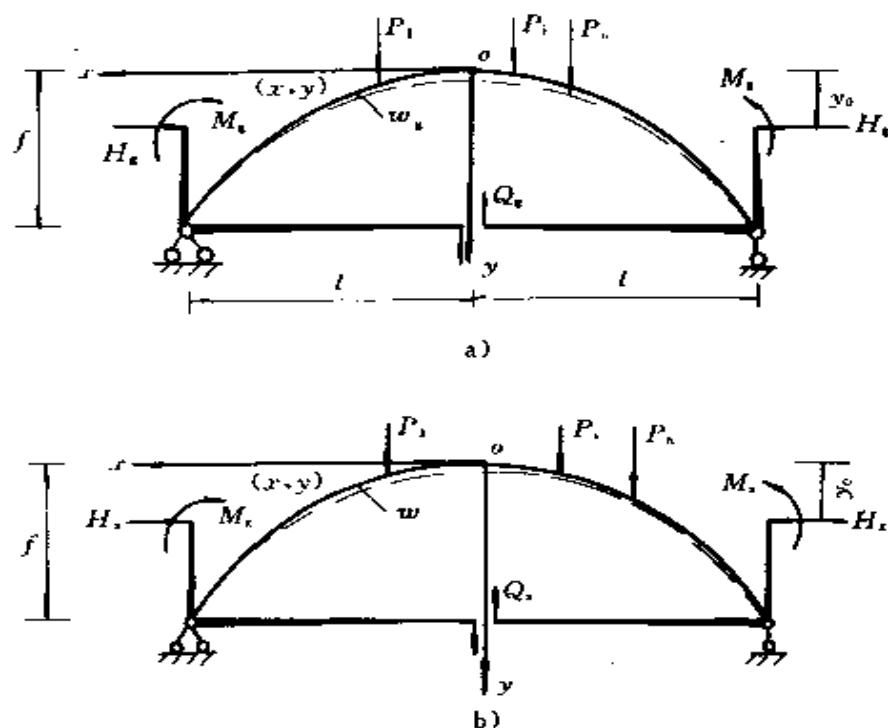


图 2-9 基本结构

和  $Q_x$ 。

图中:  $w_g$ ——恒载作用时拱轴竖向位移;

$w$ ——活载(外载)作用时拱轴竖向位移;

$y_0$ ——弹性中心至拱顶的距离(按弹性理论计算);

$f$ ——拱的矢高;

$l$ ——拱半跨长;

$H_g, M_g, Q_g$ ——恒载作用下在基本结构弹性中心的赘余水平力、弯矩和剪力;

$H_x, M_x, Q_x$ ——活载(外载)作用下在基本结构弹性中心的赘余水平力、弯矩和剪力。

### 2.7.2 恒载作用控制方程

考虑推力  $H_g$  与挠度  $w_g$  相互作用对拱内力的影响时,恒载作用下拱中任一截面的弯矩表达式可写为:

$$\begin{aligned} M &= M_g - H_g[y_0 - (y + w_g)] + \bar{M}_g \\ &= M_g + H_g(y - y_0) + H_g w_g + \bar{M}_g \end{aligned} \quad (2-52)$$

由于恒载及结构均对称,故  $Q_y = 0$ 。

将式(2-52)代入式(2-36)的第二式中,可得不考虑温度影响及收缩时,在恒载作用下的挠度理论控制方程为:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w_g}{dx^2} + \frac{H_g}{EI_x} w_g \sec \varphi \\ = - \frac{\sec \varphi}{EI_x} [M_g + H_g(y - y_0) + \bar{M}_g] - \frac{d}{dx} \left( \frac{N_g}{EA_x} \tan \varphi \right) \end{aligned} \quad (2-53)$$

式中:  $\bar{M}_g$ ——恒载在与拱同跨简支梁上产生的弯矩;

$N_g$ ——拱轴任意点的轴向力;

其它符号意义同前。

### 2.7.3 外载作用控制方程

当外载作用时,恒载挠度已经产生,这时既有外载作用,又有恒载作用,设外载作用下拱的挠度为  $w$ ,相应的轴力为  $N$ ,则拱中弯矩为

$$M = \bar{M} + \bar{M}_g + Q_x x - H_x[y - (y_0 + w_g + w)]$$

$$\begin{aligned}
& - H_g[y - (y_0 + w_g + w)] + M_x + M_x \\
& = \bar{M} + \bar{M}_g + Q_x x + H_x(y - y_0) + (H_x + H_g)w \\
& \quad + H_g(y - y_0) + (H_g + H_x)w_g + M_g + M_x
\end{aligned} \tag{2-54}$$

将式(2-54)代入式(2-36)中得:

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2}{dx^2}(w + w_g) + \frac{\sec\varphi}{EI_x}(H_x + H_g) + \frac{H_x + H_g}{EI_x}\sec\varphi w_g \\
& = -\frac{d}{dx}\left(\frac{N + N_g}{EA_x}\operatorname{tg}\varphi\right) - \frac{\sec\varphi}{EI_x}[\bar{M}_g + H_g(y - y_0) + \bar{M} \\
& \quad + Q_x x + H_x(y - y_0) + M_x + M_g]
\end{aligned} \tag{2-55}$$

将式(2-53)代入式(2-55)得

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{\sec\varphi}{EI_x}(H_x + H_g)w \\
& = -\frac{\sec\varphi}{EI_x}[\bar{M} + Q_x x + H_x(y - y_0) + M_x] \\
& \quad - \frac{d}{dx}\left(\frac{N}{EA_x}\operatorname{tg}\varphi\right) - \frac{H_x}{EI_x}\sec\varphi w_g
\end{aligned} \tag{2-56}$$

式中:  $\bar{M}$ ——外载在与拱同跨简支梁上产生的弯矩;

$N$ ——外载作用时拱轴中的轴向力。

## 2.8 约束方程

固端拱的三个位移均受到限制,而将拱内力转化为弹性中心上的三个赘余力时,这三个约束条件就变为弹性中心上的三个位移约束条件,即:

(1)弹性中心的相对水平位移为零  $\delta^h = 0$

(2)弹性中心的相对竖向位移为零  $\delta^v = 0$

(3)弹性中心的相对转角位移为零  $\delta^t = 0$

以下给出这三个约束方程的具体表达式。

如图 2-10 所示,设支点 2 发生顺时针转角  $\phi_2$ ,则弹性中心处由  $\phi_2$  所产生的水平位移  $\delta_{\phi_2}^h$  为:

$$\delta_{\phi_2}^h = -\phi_2(f - y_0) \quad (2-57)$$

竖向位移  $\delta_{\phi_2}^v$  为:

$$\delta_{\phi_2}^v = \phi_2 l \quad (2-58)$$

同理,当支点 1 处发生顺时针转角  $\phi_1$  时,则有:

$$\delta_{\phi_1}^h = \phi_1(f - y_0) \quad (2-59)$$

$$\delta_{\phi_1}^v = \phi_1 l \quad (2-60)$$

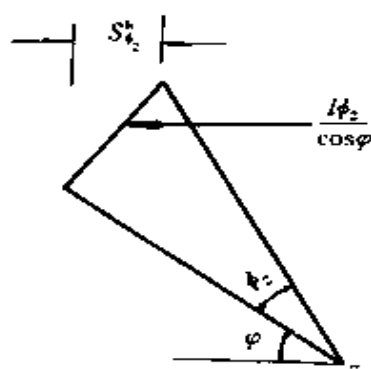


图 2-10 约束方程推导图式

若支点 1 和支点 2 的水平位移分别为  $\delta_1$  和  $\delta_2$ ,则由  $\delta_1, \delta_2$  引起弹性中心的相对水平位移  $\delta_{12}^h$  为:

$$\delta_{12}^h = \delta_1 - \delta_2 \quad (2-61)$$

将式(2-57、58、59、60、61、62)代入三个约束条件中有:

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 - \delta_2 + (\phi_1 - \phi_2)(f - y_0) &= 0 \\ (\phi_1 + \phi_2)l &= 0 \\ \phi_1 - \phi_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-62)$$

将式(2-62)化简得:

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= 0 \\ \phi_2 &= 0 \\ \delta_1 - \delta_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-63)$$

而:

$$\delta_1 - \delta_2 = -\delta(l) + \delta(l) = \int_{-l}^l \left(\frac{d\delta}{dx}\right) dx$$

即:

$$\delta_1 - \delta_2 = \int_{-l}^l \left(\frac{d\delta}{dx}\right) dx$$

注意到  $\tan \phi = y'$ , 由式(2-36)得

$$\frac{d\delta}{dx} = -\frac{dw}{dx}y' - \frac{N}{EA_x}[1 + (y')^2]$$

$$\begin{aligned} \therefore \delta_1 - \delta_2 &= \int_{-l}^l \left\{ -\frac{dw}{dx}y' - \frac{N}{EA_x}[1 + (y')^2] \right\} dx \\ &= -\int_{-l}^l \frac{dw}{dx}y' dx - \int_{-l}^l \frac{N_x}{EA_x}[1 + (y')^2] dx \end{aligned}$$

对上式中第一积分施行分部积分(附录 I)有:

$$\begin{aligned} - \int_{-l}^l \frac{dw}{dx} y' dx &= \int_{-l}^l - y' dw \\ &= - wy' \Big|_{-l}^l + \int_{-l}^l w'' dx \end{aligned}$$

注意到:  $w(v) = w(-v) = 0$  则:

$$- \int_{-l}^l \frac{dw}{dx} y' dx = \int_{-l}^l w y'' dx$$

$$\therefore \delta_1 - \delta_2 = \int_{-l}^l w y'' dx - \int_{-l}^l \frac{N_x}{EA_x} [1 + (y')^2] dx \quad (2-64)$$

双由式(2-36), 有:

$\phi = \frac{dw}{dx} + \frac{N_x}{EA_x} \operatorname{tg} \varphi$ , 则  $\phi_1, \phi_2$  变为:

$$\phi_1 = \frac{dw(l)}{dx} + \frac{N_1}{EA_1} \operatorname{tg} \varphi_1 \quad (2-65)$$

$$\phi_2 = \frac{dw(-l)}{dx} + \frac{N_2}{EA_2} \operatorname{tg} \varphi_2 \quad (2-66)$$

利用拱的对称性:  $A_1 = A_2, \operatorname{tg} \varphi_2 = -\operatorname{tg} \varphi_1$

恒载阶段

由于对称性有:

$$N_1 = N_2, \frac{dw_s(-l)}{dx} = -\frac{dw_s(l)}{dx}$$

$$\text{则: } \frac{1}{2}(\delta_1 - \delta_2) = \int_0^l w_s y'' dx - \int_0^l \frac{N_s}{EA_x} [1 + (y')^2] dx$$

$$\phi_1 = \frac{N_1}{EA_1} \operatorname{tg} \varphi_1 + \frac{dw_s(l)}{dx}$$

$$\phi_2 = -\frac{dw_s(-l)}{dx} - \frac{N_1}{EA_1} \operatorname{tg} \varphi_1$$

将以上三式代入式(2-63)中得出在恒载作用下的两个约束方程

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l w_s y'' dx - \int_0^l \frac{N_s}{EA_x} [1 + (y')^2] dx &= 0 \\ \frac{dw_s(l)}{dx} + \frac{N_1}{EA_1} \operatorname{tg} \varphi_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-67)$$

式中:  $y' = \frac{dy(x)}{dx}$ ,  $y'' = \frac{d^2y(x)}{dx^2}$ 。

同理可以得出在外载作用下的三个约束方程为:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-l}^l w y'' dx - \int_{-l}^l \frac{N_x}{EA_x} [1 + (y')^2] dx &= 0 \\ \frac{dw(l)}{dx} + \frac{N_1}{EA_1} \operatorname{tg} \varphi_1 &= 0 \\ \frac{dw(-l)}{dx} + \frac{N_2}{EA_2} \operatorname{tg} \varphi_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-68)$$

式中: 下标 1、2 分别表示左、右拱脚。

若将未经化简的式(2-68)写出来则有:

$$\left. \begin{aligned} - \int_{-l}^l w y'' dx + \int_{-l}^l \frac{N_x}{EA_x} (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) dx \\ + \left[ - \frac{dw(l)}{dx} + \frac{dw(-l)}{dx} - \frac{N_1 + N_2}{EA_1} \operatorname{tg} \varphi_1 \right] (f - y_0) &= 0 \\ - \frac{dw(l)}{dx} + \frac{dw(-l)}{dx} - \frac{N_1 + N_2}{EA_1} \operatorname{tg} \varphi_1 &= 0 \\ \frac{dw(l)}{dx} + \frac{dw(-l)}{dx} + \frac{N_1 - N_2}{EA_1} \operatorname{tg} \varphi_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-69)$$

## 第三章 竖向变形对拱内力的影响

### 3.1 基本概念

从第一章的叙述中可以看到,弹性理论分析拱桥时,不同程度地存在以下不足:

#### 1. 没有考虑拱脚推力与拱轴挠度相互作用对拱内力的影响

吊桥的挠度理论早在 1886 年就由 J·Melen 提出,后经过发展,在本世纪 30 年代,就已形成了被人们广泛接受的吊桥挠度理论。其主要内容是:考虑悬索产生的挠度时,其张力对桁梁(加劲梁)中活载内力的影响。在挠度理论中,桁梁的控制方程为(图 3-1)

$$\frac{d^2w}{dx^2} = cw - \frac{c^2}{H_g + H}(M' - Hy) \quad (3-1)$$

其中:  $C = \frac{H_g + H}{EI}$ ;

$w$ ——悬索挠度;

$H_g, H$ ——初恒载,活载在悬索两端产生的水平拉力;

$M'$ ——简支梁中的弯矩;

$EI$ ——梁的刚度。

从式(3-1)中可以看出,悬索端张力  $H_g + H$  与悬索的挠度  $w$  相互作用项  $(H_g + H)w$  反映在控制方程中。

用挠度理论分析吊桥,最大活载内力比弹性理论减少 30% 左右,量值非常可观。

拱和吊桥的相似之处在于荷载作用下支承处均有水平反力,当拱受荷载作用产生挠度  $w$  时,拱脚推力  $H$  与  $w$  的相互作用对拱

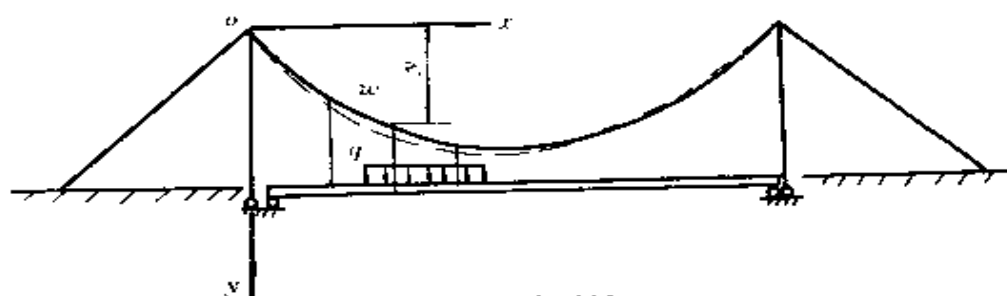


图 3-1 悬索吊桥

的内力亦产生一定影响,如图 3-2 所示,不难推知,这一影响将使拱的内力增大(与弹性理论比较),即弹性理论有其不安全的一面。

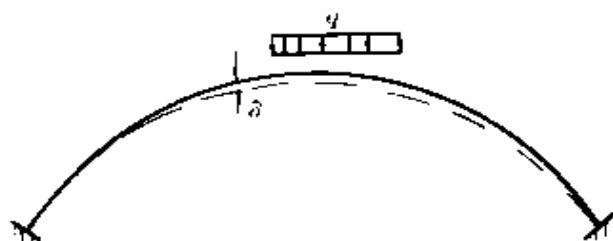


图 3-2 拱桥

2. 简单地将轴力从变位微分方程中分离出来即单独考虑所谓“弹性压缩”影响。

拱的各种变形应是同时发生的,不可单独分离独立计算,弹性理论的这一点不足之处主要表现在:单独考虑弹性压缩的影响,未考虑轴向力对转角变位的影响,这种不足在挠度理论分析时将不再存在,即在变位微分方程中将考虑轴向力这项因素,重新进行求解。

在以后的分析中,将考虑竖向变形对内力影响的理论称为挠度理论,将不考虑时的理论称为弹性理论,至于线性挠度理论在以后的分析中再作交待。

## 3.2 几种应用大变形理论的设计方法简介

### 3.2.1 一般形式的拱桥

根据拱肋与加劲梁(拱上建筑)的抗弯刚度比可将拱桥分为如图 3-3 所示的三种类型。



求解时,以弹性理论解作为初始值进行反复计算,但由于挠度理论是非线性的,要找出产生截面内力及挠度最大值时的活载加载状态是困难的,因此就采用根据弹性理论得到的影响线近似定出加载状态。最后用图表示出挠度理论与弹性理论相比的内力增加率。

### 3.2.2 抛物线两铰拱

若拱满足以下条件:(1)可忽略拱肋的截面积  $A$  的影响及拱轴的水平位移的影响,(2)恒载所产生的水平推力远大于活载水平推力,(3)拱圈惯性矩  $I_a$  与拱顶惯性矩  $I_c$  及拱轴的倾角  $\varphi$  是有以下关系。

$$I = I_a / \cos \varphi \quad (3-2)$$

则可得出与悬索桥相似的线性化计算公式(悬索桥中称为 Perry 法)。在拱的分析中,采用轴向力与弯矩的组合——组合应力。但由于轴向力受挠度影响较小,而弯矩受挠度影响较大,因此可主要考虑弯矩的增加率。而弯矩的增加率又受以下无因次数支配:

$$\mu l = lH / EI_a \quad (3-3)$$

式中:  $l$  为跨径,  $H = H_g + H_p$ , 由恒载与活载产生的水平推力。

图 3-4 给出加劲梁弯矩增加率随  $\mu l$  的变化情况。

### 3.2.3 三铰拱

根据研究结果,拱肋应力可用下式表示:

$$f_t = f_a + f_b \frac{1}{1 - \frac{f_a}{nE} \left( \frac{L}{r} \right)^2} \quad (3-4)$$

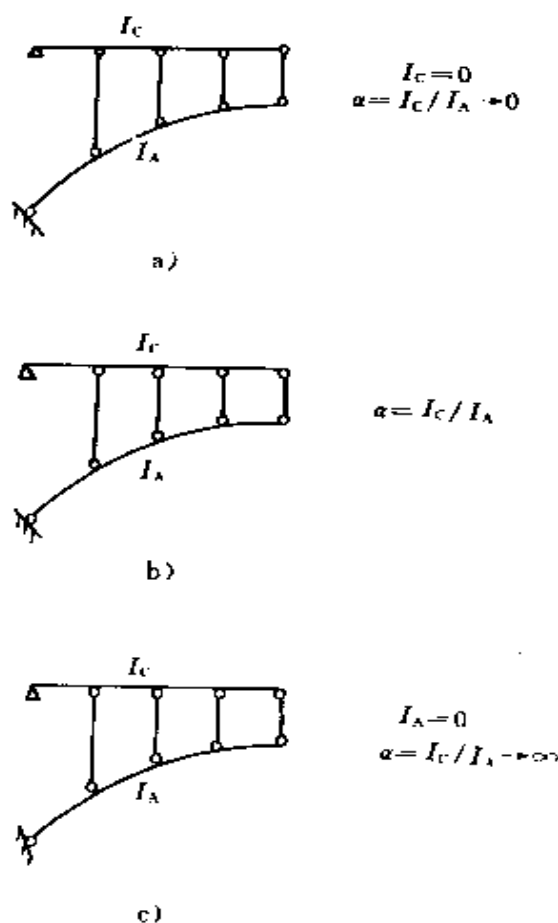


图 3-3 拱桥分类

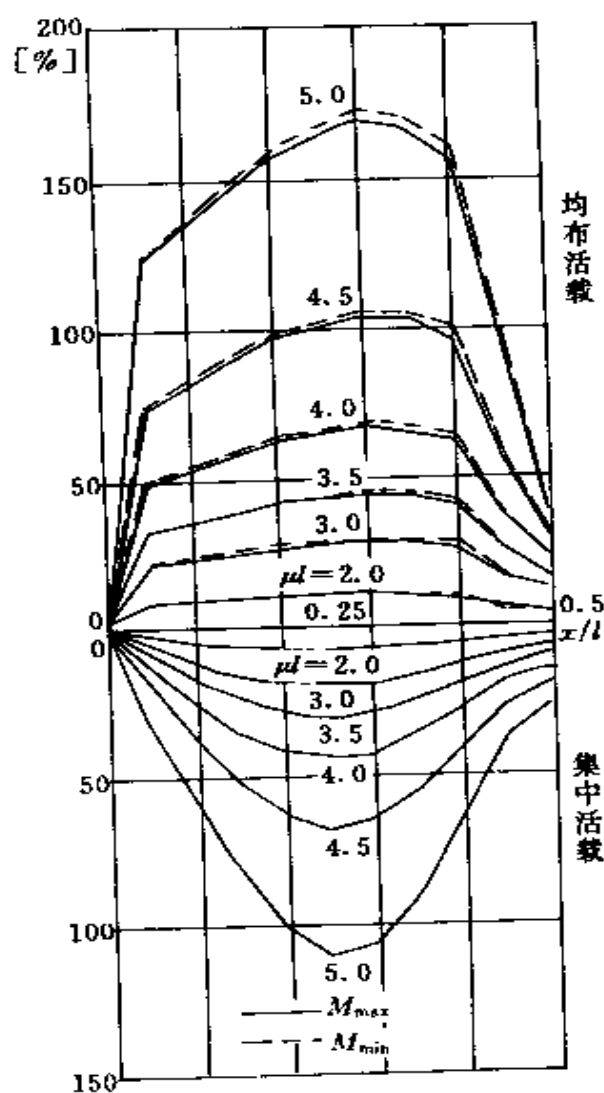


图 3-4 弯矩的增加率

式中:

$f_c$ ——轴向应力与弯曲应力的组合应力, 亦为设计应力;

$f_a$ ——对应于荷载轴向力的应力, 即  $f_a = \frac{N}{A}$ ;

$f_b$ ——弹性理论所计算的由弯矩所引起的应力, 即  $f_b = \frac{M}{z}$ ;

$\frac{1}{1 - \left( \frac{f_a}{nE} \right) (L/r)^2}$ ——弯曲应力  $f_b$  的增加率系数;

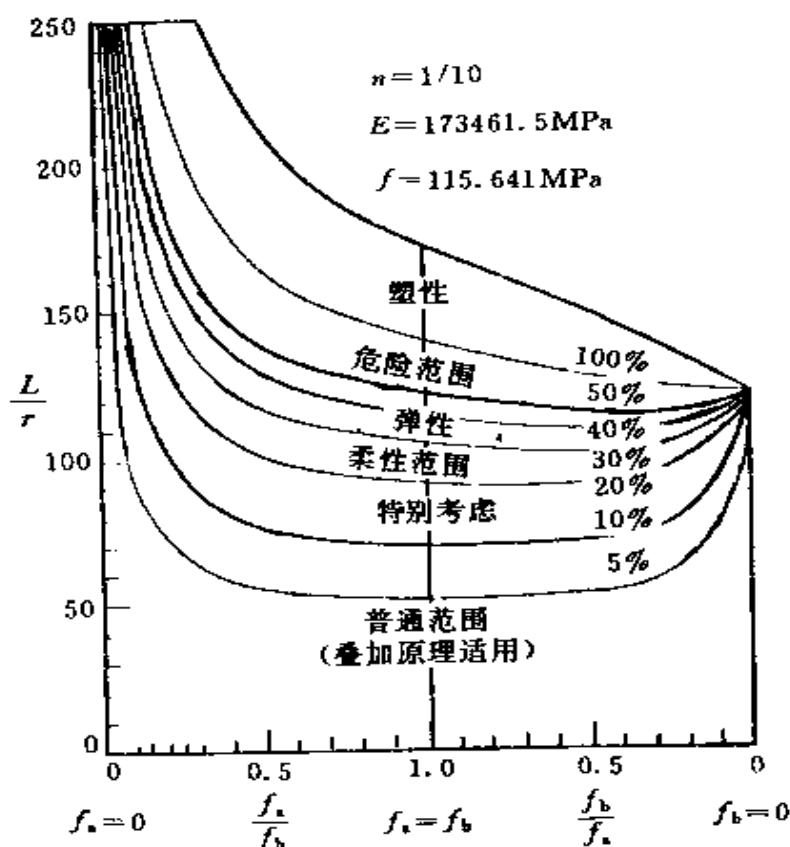
$n$ ——视荷载及杆件形状而定的系数;

$L/r$ ——长细比( $L$ =跨径, $r$ 为截面回转半径);

$E$ ——弹性模量。

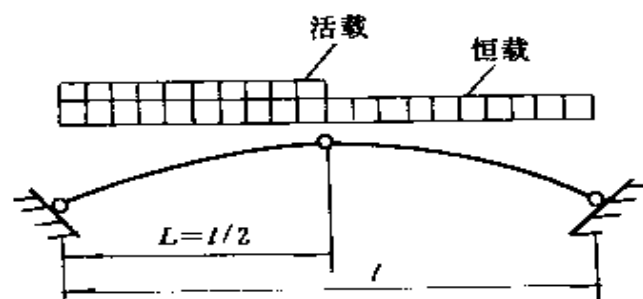
若忽略挠度的影响,则  $f_i = f_a + f_b$ ,此即为弹性理论值。

图 3-5 给出三铰拱在恒载为满布均布载、活载的半跨均载,  $f_i$



a)

a) 组合应力的增加率( $f_i/f$ )



b)

b) 三铰拱的荷载状态

图 3-5 三铰拱的组合应力增加率( $f_i/f$ )

$=f_a+f_b=f=115.641\text{MPa}$  时,相应于  $L/r, f_a/f_b$  和  $f_b/f_a$  时的  $f_i/f$  的增加率。这种加载状态中,  $L/4$  点的应力并非最大,但为了方便起见就用这种加载状态来计算。

若  $f \neq 115.641\text{MPa}$  时,且不是三铰拱情况下可按下列方式对  $L/r$  进行修正来使用图 3-5。

若应力(弹性理论值)为  $f'$ ,则相应的  $(L/r)'$  为

$$(L/r)' = \frac{1}{r} \sqrt{f'/115.641} \quad (3-5)$$

根据拱的形式不同  $\frac{L}{r}$  的修正值  $(L/r)''$  为

$$\left(\frac{L}{r}\right)'' = (L/r)'k \quad (3-6)$$

式中  $k$  值如下:

三铰拱:	1.0
两铰拱:	0.9
单铰拱:	0.8
无铰拱:	0.7

此三种方法各有优缺点,3.2.1 中,拱桥形式、截面及荷载为任意的,看似比较严密,但是看不出使所考虑的截面力达最大值的荷载加载状态。3.2.2 中,可以应用影响线,对设计非常有利,任对于任意的拱形式及截面就不适用。3.2.3 中,可以直接推算设计应力的增加率,而且便于说明拱的性状,但按目前设计要求就感到粗略。

### 3.3 抛物线拱在均布荷载作用下 的大变形内力近似解

由第二章可知,在轴向力  $N$ ,弯矩  $M$  以及温度变化和收缩的共同作用下(忽略剪力影响),下列二阶微分方程成立

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M}{EA_x \cos \varphi} + y' \left( \frac{N}{EA_x} \right) + \frac{N}{EA_x} y'' \mp \epsilon + y'' \quad (3-7)$$

注意此处以图 3-6 所示坐标写出,符号与前述公式有区别。

如果  $y$  以  $x$  的函数关系表示,解上式则可得到竖向位移  $w$ 。但在拱的挠度理论中,应考虑  $w$  对  $M$  的影响。

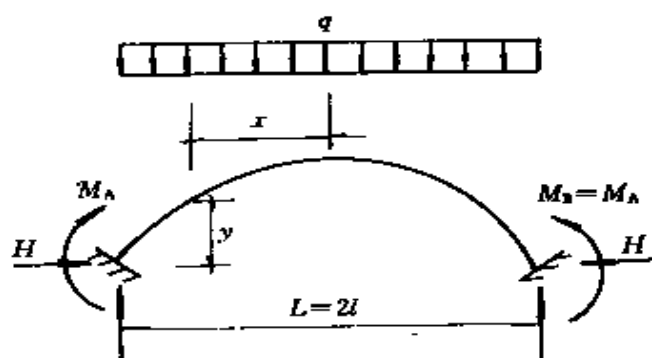


图 3-6 作用均匀布载的抛物线拱

以下以抛物线无铰拱上作用均匀满布荷载  $q$  为例求解。设  $A_x = A_d/\cos\varphi$ ,  $I_x = I_d/\cos\varphi$ , 如图 3-6 所示,则拱轴线方程为:

$$y = \frac{f}{l^2}(l^2 - x^2) = \frac{n}{l}(l^2 - x^2) \quad (3-8)$$

其中

$$n = \frac{f}{l} \quad (3-9)$$

由于结构和荷载都是对称的,所以赘余力简化为两个:拱脚的弯矩  $M_A$  和推力  $H$ 。

在考虑了挠度  $w$  的影响后,任意截面的弯矩为:

$$M = M_A - H(y - w) + \bar{M} \quad (3-10)$$

式中:

$$\bar{M} = \frac{q}{2}(l^2 - x^2) \quad (3-11)$$

为基本结构中任意截面的弯矩。

将式(3-8)代入式(3-10),可得:

$$M = M_A + \frac{q}{2}(l^2 - x^2) - H \frac{n}{l}(l^2 - x^2) + Hw \quad (3-12)$$

将式(3-12)代入式(3-7)并整理得:

$$\frac{d^2w}{dx^2} + c^2w = -c^2F(x) \quad (3-13)$$

式中:

$$c^2 = \frac{H}{EI_x} \quad (3-14)$$

$$F(x) = \frac{M_A}{H} + \frac{q}{2H}(l^2 - x^2) - \frac{n}{l}(l^2 - x^2) - \frac{I_d \cos \varphi}{A_d} \cdot \frac{N}{H} \cdot y'' - \frac{I_d \cos \varphi}{A_d H} N' y' \pm \frac{\epsilon t}{c^2} y'' \quad (3-15)$$

由于在一般情况下,可取

$$N = H/\cos \varphi \quad (3-16)$$

故式(3-15)的第四项为

$$- \frac{I_d \cos \varphi}{A_d} \frac{N}{H} y'' = - \frac{I_d}{A_d} \left( - \frac{2n}{l} \right)$$

再注意到  $\cos \varphi = (1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}}$ , 则可将式(3-15)的第五项写成:

$$\begin{aligned} - \frac{I_d \cos \varphi}{A_d H} N' y' &= - \frac{I_d \cos \varphi}{A_d H} \cdot \frac{d}{dx} (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} y' \\ &= - \frac{I_d}{A_d} (1 + y'^2)^{-1} y'^2 y'' \\ &= - \frac{I_d}{A_d} (1 - y'^2 + \dots) (y'^2) y'' \\ &\approx \frac{I_d}{A_d} \frac{8n^3}{l^3} x^2 \end{aligned}$$

于是  $F(x)$  的表达式可进一步整理成为:

$$F(x) = c_1 + c_2 x^2 \quad (3-17)$$

而

$$c_1 = \frac{M_A}{H} + \frac{q}{2H} l^2 - nl + \frac{I_d}{A_d} \cdot \frac{2n}{l} \mp \epsilon t \frac{n}{c^2 l} \quad (3-18)$$

$$c_2 = - \frac{q}{2H} + \frac{n}{l} + \frac{I_d}{A_d} \cdot \frac{8n^3}{l^3} \quad (3-19)$$

微分方程(3-13)的通解为:

$$\begin{aligned} w &= B_1 \cos cx + B_2 \sin cx - F(x) + \frac{F''(x)}{c^2} \\ &= B_1 \cos cx + B_2 \sin cx - c_1 - c_2 \left( x^2 - \frac{2}{c^2} \right) \end{aligned} \quad (3-20)$$

式中的积分常数  $B_1, B_2$  可由边界条件:

$$x = 0 \quad w' = 0$$

$$x = l \quad w' = 0$$

确定如下:

$$\left. \begin{aligned} B_2 &= 0 \\ B_1 &= -\frac{2l}{c \sin cl} \cdot c_2 \end{aligned} \right\} \quad (3-21)$$

于是有:

$$w = c_1 - c_2 \left( x^2 - \frac{2}{c^2} + \frac{2l \cos cx}{c \sin cl} \right) \quad (3-22)$$

再利用边界条件:

$$x = \pm l \quad w = 0$$

可知有下列关系存在:

$$-c_1 - c_2 \left( l^2 - \frac{2}{c^2} + \frac{2l \cos cx}{c \sin cl} \right) = 0 \quad (3-23)$$

将式(3-18)代入式(3-23),可得到拱脚的弯矩表达式如下:

$$\begin{aligned} M_A &= H \left[ c_2 \left( -l^2 + \frac{2}{c} - \frac{2l}{c} \operatorname{ctg} cl \right) + nl \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{I_d}{A_d} \frac{n}{l} \pm \frac{2 \epsilon n}{c^2 l} \right] - \frac{ql^2}{2} \end{aligned} \quad (3-24)$$

以下来确定推力  $H$ 。

根据两支座间的相对水平位移应为零这一条件,即式(2-46)

有:

$$2 \int_0^l w' y' dx + 2 \int_0^l \left( \frac{-H}{EA_d} \pm \epsilon \right) (1 + y'^2) dx = 0 \quad (3-25)$$

因为

$$\begin{aligned} \int_0^l y' w' dx &= \int_0^l (c B_1 \sin cx + 2c_2 x) \frac{2n}{l} x dx \\ &= 2n B_1 \cos cl + \frac{2n B_1}{cl} \sin cl + \frac{4}{3} n l^2 c_2 \\ \int_0^l (1 + y'^2) dx &= \int_0^l \left( 1 + \frac{4n^2}{l^2} x^2 \right) dx = l + \frac{4}{3} n^2 l \end{aligned}$$

所(3-25)式可以写为:

$$B_1 \left( -2n \cos cl + \frac{2n}{cl} \sin cl \right) + \frac{4}{3} n l^2 c_2$$

$$+ \left( -c^2 \frac{I_d}{A_d} \pm \epsilon t \right) \left( l + \frac{4}{3} n^2 l \right) = 0$$

再引入  $B_1$  的表达式, 则得:

$$\begin{aligned} & -4nlc_2 \left( -\frac{\text{ctg}cl}{c} + \frac{1}{c^2 l} - \frac{l}{3} \right) \\ & + \left( -c^2 \frac{I_d}{A_d} \pm \epsilon t \right) \left( l + \frac{4}{3} nl \right) = 0 \end{aligned} \quad (3-26)$$

利用反复试算法则可由上式求出  $H$ 。

### 3.4 大变形内力的差分解法<sup>[13]</sup>

#### 3.4.1 不计温度影响并忽略剪力影响项

对于等截面拱, 则有(注意图 3-7 的坐标系):

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{EI_x \cos \varphi} + \frac{1}{EA_x} (N' y') - \frac{N}{EA_x} y'' \quad (3-27)$$

在一般情况下, 可近似取:

$$N = H / \cos \varphi \quad (3-28)$$

注意到  $\cos \varphi = [1 + (y')^2]^{-\frac{1}{2}}$ , 则有:

$$N = \frac{H}{\cos \varphi} = H[1 + (y')^2]^{-\frac{1}{2}} \quad (3-29)$$

于是可以得到:

$$N' = H[1 + (y')^2]^{-\frac{1}{2}} y' y'' \quad (3-30)$$

将式(3-20)代入式(3-27), 可得到如下方程:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{EI_x \cos \varphi} + \frac{H y''}{EA_x \cos \varphi} (1 + \sin^2 \varphi) \quad (3-31)$$

而拱任意截面的弯矩  $M$  为:

$$\begin{aligned} M = & M_A \left( 0.5 + \frac{x}{2l} \right) + M_B \left( 0.5 - \frac{x}{2l} \right) \\ & - H(y - w) + \bar{M} \end{aligned} \quad (3-32)$$

式中:  $M_A$ 、 $M_B$ ——无铰拱左、右两端的弯矩(图 3-7);

$\bar{M}$ ——其本结构(简支曲梁)上由于荷载所产生的弯矩值。



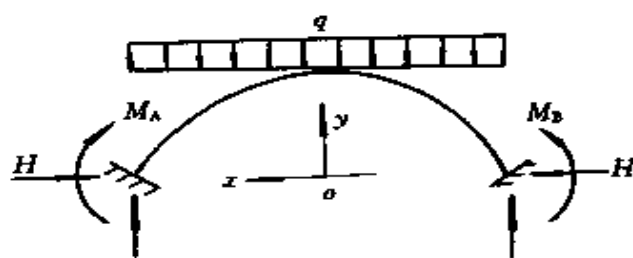


图 3-7 差分法基本结构

将式(3-32)代入式(3-31),则有:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = - \frac{\left[ M_A \left( 0.5 + \frac{x}{2l} \right) + M_B \left( 0.5 - \frac{x}{2l} \right) - H(y - w) + \bar{M} \right]}{EI_x \cos \varphi} + \frac{Hy''}{EA \cos \phi} (2 - \cos^2 \varphi) \quad (3-33)$$

与式(3-33)相对应的差分方程为:

$$\begin{aligned} & \frac{EI_x}{\Delta x^2} (w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}) + \frac{Hw_i}{\cos \varphi_i} + \frac{M_A \left( 0.5 + \frac{x_i}{2l} \right)}{\cos \varphi_i} \\ & + \frac{M_B \left( 0.5 - \frac{x_i}{2l} \right)}{\cos \varphi_i} - \left[ \frac{y_i}{\cos \varphi_i} + \frac{I_x}{A_x} \cdot \frac{y''_i (2 - \cos^2 \varphi_i)}{\cos \varphi_i} \right] \cdot H \\ & = - \frac{\bar{M}_i}{\cos \phi_i} \end{aligned} \quad (3-34)$$

上列差分方程,可直接应用于拱内的任意差分点。例如,对于图 3-8 所示无铰拱,点 1、2 和 3 对应的差分方程分别为:

$$\begin{aligned} & \frac{EI_1 \cos \varphi_1}{\Delta x^2} (-2w_1 + w_2) + Hw_1 + M_A \left( 0.5 + \frac{x_1}{2l} \right) \\ & + M_B \left( 0.5 - \frac{x_1}{2l} \right) - \left[ y_1 + \frac{I_1}{A_1} \cdot y''_1 (2 - \cos^2 \varphi_1) \right] H \\ & = - \bar{M}_1 \end{aligned} \quad (a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{EI_2 \cos \varphi_2}{\Delta x^2} (w_1 - 2w_2 + w_3) + Hw_2 + M_A \left( 0.5 + \frac{x_2}{2l} \right) \\ & + M_B \left( 0.5 - \frac{x_2}{2l} \right) - \left[ y_2 + \frac{I_2}{A_2} y''_2 (2 - \cos^2 \varphi_2) \right] H \\ & = - \bar{M}_2 \end{aligned} \quad (b)$$

$$\frac{EI_3 \cos \varphi_3}{\Delta x^2} (w_2 - 2w_3) + Hw_3 + M_A \left( 0.5 + \frac{x_3}{2l} \right)$$

$$+ M_B \left( 0.5 - \frac{x_3}{2l} \right) - \left[ y_3 + \frac{I_3}{A_3} \cdot y''_3 (2 - \cos^2 \varphi_3) \right] H \\ = - \bar{M}_3 \quad (c)$$

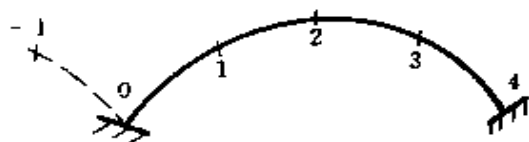


图 3-8 差分法示例

对于拱脚处的差分点,例如差分点 0,因为  $\frac{dw}{dx} = 0$ ,所以  $w_{-1} = w_1$ ,故有:

$$\frac{EI_0 \cos \varphi_0}{\Delta x^2} (2w_1) + M_B - \frac{I_0}{A_0} y''_0 (2 - \cos^2 \varphi_0) H = 0 \quad (d)$$

同理,对于差分点 4 有:

$$\frac{EI_4 \cos \varphi_4}{\Delta x^2} (2w_3) + M_A - \frac{I_4}{A_4} y''_4 (2 - \cos^2 \varphi_4) H = 0 \quad (e)$$

值得注意的是,在由式(a)~(e)所组成的方程组中,包含着  $H$  与  $w$  的乘积项,因此是非线性的。而且,在这组方程中包含着  $w_1, w_2, w_3, M_A, M_B$  和  $H$  六个未知量,要求得确定的解答必须增加一个方程,而这个方程可由式(2-48)得到(注意坐标的变化):

$$- EA \int_{-1}^1 w y'' dx - H \int_{-1}^1 \frac{(1 + y'^2)}{\cos \varphi} dx = 0 \quad (3-35)$$

利用辛卜森公式,对于图 1-8 所示的差分网格可把式(3-35)写成如下差分方程:

$$- EA (4w_1 y''_1 + 2w_2 y''_2 + 4w_3 y''_3) - H \frac{(1 + y'^2_0)}{\cos \varphi_0} \\ + \frac{4(1 + y'^2_1)}{\cos \varphi_1} + \frac{2(1 + y'^2_2)}{\cos \varphi_2} + \frac{4(1 + y'^2_3)}{\cos \varphi_3} + \frac{(1 + y'^2_4)}{\cos \varphi_4} \\ = 0 \quad (f)$$

### 3.4.2 进一步忽略轴向力对位移的影响

若将轴向力对位移的影响亦忽略不计,拱轴平衡微分方程可简化为:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = - \frac{M}{EI_x \cos \varphi} \quad (3-36)$$

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{dw}{dx} \operatorname{tg} \varphi \quad (3-37)$$

以下就此简单情况介绍另一种差分方法。

方程(3-36)可以写成如下差分式：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x^2} (w_{m-1} - 2w_m + w_{m+1}) \\ &= -\frac{1}{12E} \left( \frac{M_{m-1}}{I_{m-1} \cos \varphi_{m-1}} + \frac{10M_m}{I_m \cos \varphi_m} + \frac{M_{m+1}}{I_{m+1} \cos \varphi_{m+1}} \right) \end{aligned} \quad (3-38)$$

式中,  $m-1$ 、 $m$  和  $m+1$  是拱轴上水平间距为  $\Delta x$  的三个连续的网格点(图 3-9)。该式只能用于函数  $M(x, \delta, w)$  是连续和光滑的情况。如果  $M$  沿拱轴的变化不是光滑和连续的, 则用下述方程：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x^2} (w_{m-1} - 2w + w_{m+1}) \\ &= -\frac{1}{6E} \left( \frac{M_{m-1}}{I_{m-1} \cos \varphi_{m-1}} + \frac{2M_{ml} + 2M_{mr}}{I_m \cos \varphi_m} + \frac{M_{m+1}}{I_{m+1} \cos \varphi_{m+1}} \right) \end{aligned} \quad (3-39)$$

式中:  $M_{ml}$  和  $M_{mr}$  —— 网格点  $m$  左边和右边的弯矩。

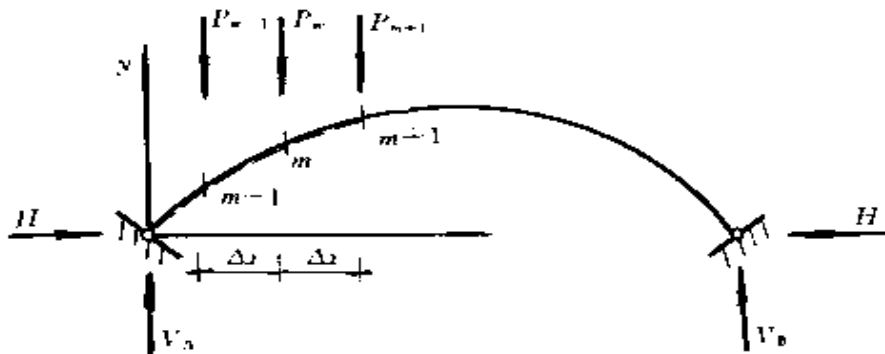


图 3-9 差分法

方程(3-37)所表达的竖向位移  $w$  和水平位移  $\delta$  之间的关系, 在差分法里可归结为确定网格点处位移  $\delta$  和  $w$  的关系。在确定这种关系时, 由于不计轴向变形的影响, 可用链杆来代替拱轴的光滑曲线, 如图 1-9 中的虚线所示。设有  $n$  根链杆, 则有  $(n-1)$  个可动结点, 即  $2(n-1)$  个结点位移。但由于  $n$  根链杆只有  $n-2$  个自由度, 所以  $2(n-1)$  个结点位移( $\delta$  和  $w$ ) 可用  $(n-2)$  个独立位移表示。通常以选取结点的竖向位移为独立位移较为简便。这样的纯几

何问题,可由简单的位移图求出。

按上述差分法求解时,可归结为下列步骤:

- (1) 将拱轴沿其跨度分成若干段,每段的水平长度均为  $\Delta x$ ;
- (2) 用静力等效的集中荷载代替作用在拱上的分布荷载;
- (3) 列出拱上任意点  $m$  处的弯矩  $M_m$ 。

在考虑了荷载作用点处位移  $\delta$  和  $w$  的影响后,任意点  $m$  处的弯矩  $M_m$  为:

$$M_m = V_A(x_m + \delta_m) - H(y_m - w_m) - \sum P_i(x_m - x_i + \delta_m - \delta_i) \quad (3-40)$$

式中:  $H$ ——为拱的水平推力;

$V_A$ ——为左拱脚的竖向反力,它可写成

$$V_A = \frac{1}{2l} \sum P_i(2l - x_i - \delta_i) \quad (3-41)$$

$V_B$ ——为右拱脚的竖向反力,可写成

$$V_B = \frac{1}{2l} \sum P_i(x_i + \delta_i) \quad (3-42)$$

(4) 利用位移图,确定各网格点处的水平位移  $\delta$  与独立的竖向位移之间的关系,并将任意点  $m$  的弯矩用独立的竖向位移表示之;

(5) 将各网格点的弯矩  $M_m$  代入差分式(3-38)或(3-39),就组成了  $(n-1)$  个方程,利用这些方程可算出  $(n-2)$  个独立的竖向位移以及水平推力  $H$ 。

对于无铰拱,亦按类似的步骤进行计算,此时:

$$M_m = M_A + V_A(x_m + \delta_m) - H(y_m - w_m) - \sum P_i(x_m - x_i + \delta_m - \delta_i) \quad (3-43)$$

$$V_A = \frac{1}{2l} \sum P_i(2l - x_i - \delta_i) - \frac{(M_A + M_B)}{2l} \quad (3-44)$$

在以上两式中,  $M_A$ 、 $M_B$  分别为左右两支点的弯矩,如图 3-10 所示。同时,尚须用支点以外的网格点写出支座外的其余两个方

程。例如,在支点  $A$  处,因为  $\frac{dw}{dx} = 0$ , 有  $w_0 = 0, w_{-1} = w_1, M_{-1} = M_1$ , 所以由式(3-38)可得到下列差分式:

$$\frac{2w_1}{\Delta x^2} = -\frac{1}{12E} \left( \frac{10M_A}{I_0 \cos \varphi_0} + \frac{2M_1}{I_1 \cos \varphi_1} \right) \quad (3-45)$$

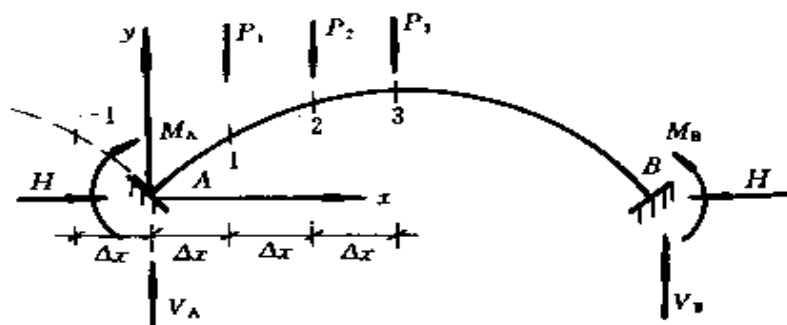


图 3-10 固端拱 —— 差分法

### 3.5 弯矩增大系数法<sup>[13]</sup>

挠度理论同一般弹性分析法的主要区别,在于它考虑了挠度  $w$  对拱的内力的影响。由于无铰拱和单铰拱可看成是一端简支、一端固结的压弯杆件;两铰拱和三铰拱可看成是两端铰接压弯杆件,所以可把直杆中考虑“梁柱效应”的方法用来分析挠度  $w$  对拱的内力的影响。

首先考虑一承受纵横弯曲作用的简支梁(图 3-11)。此时,对于等截面在均布荷载  $q$  和轴向力  $N$  的共同作用下,梁的挠度为:

$$y = \frac{q}{EI k^4} \left[ \frac{\cos \frac{kl}{2} \left( 1 - \frac{2x}{l} \right)}{\cos \frac{kl}{2}} - 1 \right] - \frac{q}{2EI k^2} x(l-x) \quad (3-46)$$

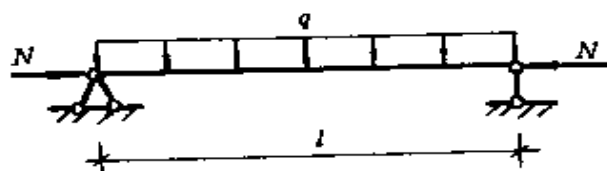


图 3-11 纵横弯曲简支梁

式中:

$$k^2 = \frac{N}{EI} \quad (3-47)$$

将  $x = \frac{l}{2}$  代入上式, 即得梁的最大挠度为:

$$y_{\max} = \frac{q}{EI k^4} \left[ \sec \frac{kl}{2} - 1 - \frac{k^2 l^2}{8} \right] = \frac{5ql^4}{384EI} \beta_0 \quad (3-48)$$

式中:

$$\beta_0 = \frac{384}{5k^4 l^4} \left( \sec \frac{kl}{2} - 1 - \frac{k^2 l^2}{8} \right) \quad (3-49)$$

注意到, 简支梁在  $q$  作用下中点的挠度为  $\frac{5ql^4}{384EI}$ , 则可以把  $\beta_0$  看成是由于  $q$  和  $N$  的共同影响所引起的挠度增大系数。

以  $N_{cr}$  表示欧拉临界力, 即令:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (3-50)$$

并把式(3-46)中的  $\sec \frac{kl}{2}$  化为下列参数:

$$\alpha = \frac{N}{N_{cr}} = \frac{Nl^2}{9.87EI} \quad (3-51)$$

的级数, 则有

$$\beta_0 = 1 + \frac{61\pi^2}{600}\alpha + \frac{1385\pi^4}{134400}\alpha^2 + \dots \approx \frac{1}{1-\alpha}$$

于是得

$$y_{\max} = \frac{5ql^4}{384EI} \frac{1}{1-\alpha} \quad (3-52)$$

显然, 梁在  $q$ 、 $N$  的共同作用下其中点的弯矩为

$$\begin{aligned} M_0 &= \frac{1}{8}ql^2 + N \cdot \frac{5ql^4}{384EI} \beta_0 \\ &= \frac{1}{8}ql^2 \cdot \psi \end{aligned} \quad (3-53)$$

式中:

$$\psi = 1 + \frac{5Nl^2}{45EI} \cdot \frac{1}{1-\alpha} = 1 + \frac{5\pi^2}{45} \cdot \frac{N}{N_{cr}} \cdot \frac{1}{1-\alpha}$$

$$= \frac{1 + 0.03\alpha}{1 - \alpha}$$

由上式可见,当  $\alpha=1$ ,即当轴向力趋近于  $N_{cr}$  时,挠度和弯矩将趋于无限大。

对于一端固定、一端简支的情况(此时,  $\alpha = \frac{Nl^2}{20.19EI}$ ),有:

在固端处

$$\phi = \frac{1 - 0.38\alpha}{1 - \alpha}, M_0 = -\frac{ql^2}{8} \quad (3-54)$$

在跨度中央

$$\phi = \frac{1 - 0.014\alpha}{1 - \alpha}, M_0 = \frac{ql^2}{16} \quad (3-55)$$

最大弯矩发生在  $\frac{3l}{8}$  处,其值为

$$M_{\max} = \frac{9ql^2}{128} \frac{1 + 0.121\alpha}{1 - \alpha} \quad (3-56)$$

上述对于直梁所得到的结果能在拱中运用。现对抛物线无铰拱的情况说明如下:

1. 反对称变形状态(图 3-12)

对于此种变形状态,水平推力  $H$  由于变形所引起的变

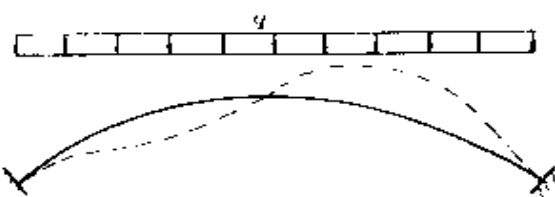


图 3-12 反对称变形状态

化微小,半跨拱可比拟为一端固定、一端铰支的压弯杆件(其跨度等于拱跨的  $1/2$ )。为简化计,假定  $I_x \cos \phi = I_d$ ,  $N = H / \cos \phi$ ,则由式 (3-52) 可得到无铰拱在反对称变形状态在固端处、 $\frac{1}{4}$  点处和  $x = \frac{3}{8}l$  处的弯矩值分别如下:

固端处:

$$\bar{M} \approx M_0 \frac{\bar{\alpha} - 0.382}{\bar{\alpha} - 1}, M_0 = -\frac{ql^2}{8} \quad (3-57)$$

$\frac{1}{4}$  点处:

$$\bar{M} \approx M_0 \frac{\bar{\alpha} - 0.014}{\bar{\alpha} - 1}, M_0 = -\frac{ql^2}{16} \quad (3-58)$$

$x = \frac{3}{8}l$  处:

$$\bar{M}_{\max} \approx M_0 \frac{\bar{\alpha} - 0.121}{\bar{\alpha} - 1}, M_0 = -\frac{9}{128}ql^2 \quad (3-59)$$

其中

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{\alpha} = 20.19 \frac{EI_d}{Hl^2} \quad (3-60)$$

## 2. 对称变形状态(图 3-13)

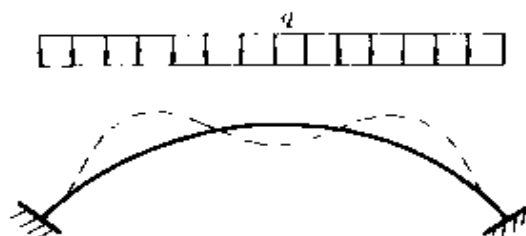


图 3-13 对称变形状态

此时,拱的变形对推力  $H$  的影响较大,必须考虑由于拱的变形所引起的附加推力的影响才能描述拱的实际受力和变形状态。这种附加推力可看作是由于拱轴的弹性压缩引起的,因此,可按下列式计算:

$$H_e = \frac{- \int \frac{N_x}{A_x} \cos \varphi ds}{\int \frac{y^2}{I_x} ds + \int \frac{\cos^2 \varphi}{A_x} ds} \quad (3-61)$$

仍取  $N_x = \frac{H}{\cos \varphi}$ , 则有:

$$H_e = -H \frac{\int \frac{ds}{A_x}}{\int \frac{y^2}{I_x} ds + \int \frac{\cos^2 \varphi}{A_x} ds} \quad (3-62)$$

在上式中略去分母的第二项,并假定  $I_x \cos \varphi = I_d$ ,  $A_x \cos \varphi = A_d$ , 可得:



$$H_e = -\frac{15}{8} \frac{H}{f^2} \frac{I_d}{A_d} \quad (3-63)$$

由该附加推力(通过拱的弹性中心,如图 3-14 产生的弯矩为  $M_0 = H_e \cdot Z$ 。由弯矩  $M_0$  使拱产生的变形为:

$$w_1 = \int \frac{M_0 ds}{EI_x} \quad (3-64)$$

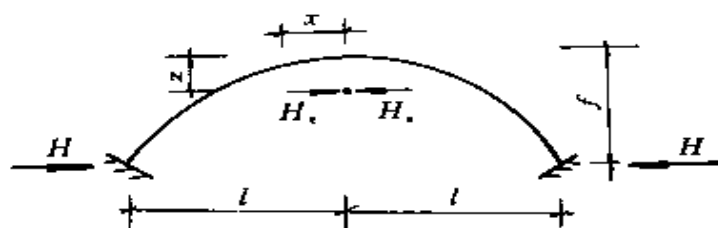


图 3-14 附加推力作用

因而又产生附加弯矩  $M_1 = Hw_1$ , 与此相同, 将产生  $w_2, M_2, w_3, M_3, \dots$ 。最后将结果相加, 可得:

顶点处的弯矩为:

$$\bar{M} = M_0 \frac{\bar{\alpha} - 0.120}{\bar{\alpha} - 1}, \text{ 其中 } M_0 = \frac{1}{3} H_e f \quad (3-65a)$$

$\frac{3}{8}$  点处的弯矩为:

$$\bar{M} = M_0 \frac{\bar{\alpha} - 0.75}{\bar{\alpha} - 1}, \text{ 其中 } M_0 = \frac{13}{48} H_e \cdot f \quad (3-65b)$$

$\frac{1}{4}$  点处的弯矩为:

$$\bar{M} = M_0 \left( \frac{\bar{\alpha} - 3.918}{\bar{\alpha} - 1} + \frac{0.727}{\bar{\alpha}} + \frac{0.210}{\bar{\alpha}^2} \right) \quad (3-65c)$$

其中:  $M_0 = \frac{1}{12} H_e f$

$\frac{1}{8}$  点处的弯矩为:

$$\bar{M} = M_0 \left( \frac{\bar{\alpha} - 1.418}{\bar{\alpha} - 1} + \frac{0.580}{\bar{\alpha}} + \frac{0.191}{\bar{\alpha}^2} \right) \quad (3-65d)$$

其中:  $M_0 = -\frac{11}{48} H_e f$

拱脚处的弯矩为:

$$\overline{M} = M_0 \left( \frac{\overline{\alpha} - 1.418}{\overline{\alpha} - 1} - \frac{0.537}{\overline{\alpha}} - \frac{0.089}{\overline{\alpha}^2} \right) \quad (3-65e)$$

其中:  $M_0 = -\frac{2}{3} H_e f$

注意, 在式(3-65)中的  $\overline{\alpha}$  为:

$$\overline{\alpha} = 33.05 \frac{EI_d}{Hl^2} \quad (3-66)$$

## 第四章 等截面无铰拱的摄动法解答

### 4.1 基本方程

对于弹性模量  $E$ 、拱圈面积  $A$  沿拱轴不变的等截面拱,其基本方程为:

#### 4.1.1 恒载阶段

$$\frac{d^2 w_s}{dx^2} + \frac{H_s}{EI} w_s \sec \varphi = f_s(x) \quad (4-1)$$

其中

$$f_s(x) = -\frac{\sec \varphi}{EI} [M_s + H_s(y - y_0) + \bar{M}_s] - \frac{1}{EA} \frac{d}{dx} (N_s \operatorname{tg} \varphi)$$

求解约束方程为:

$$\int_0^l w_s y'' dx - \int_0^l \frac{N_s}{EA} [1 + (y')^2] dx = 0 \quad (4-2)$$

$$\frac{dw_s(l)}{dx} + \frac{N_1}{EA_1} \operatorname{tg} \varphi_1 = 0 \quad (4-3)$$

边界条件为

$$w(l) = w(-l) = 0, \frac{dw(0)}{dx} = 0 \quad (4-4)$$

#### 4.1.2 外载阶段

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{H_s + H_x}{EI} w \sec \varphi = f(x) \quad (4-5)$$

其中

$$f(x) = -\frac{\sec \varphi}{EI} [\bar{M} + Q_x x + H_x(y - y_0) + M_x]$$

$$= \frac{1}{EA} \frac{d}{dx} (N \operatorname{tg} \varphi) = \frac{H_x}{EI} \sec \varphi w_g$$

约束方程为:

$$\int_{-l}^l w y'' dx = \int_{-l}^l \frac{N_x}{EA} [1 + (y')^2] dx = 0 \quad (4-6)$$

$$\frac{dw(l)}{dx} + \frac{N_1}{EA} \operatorname{tg} \varphi_1 = 0 \quad (4-7)$$

$$\frac{dw(-l)}{dx} + \frac{N_2}{EA} \operatorname{tg} \varphi_2 = 0 \quad (4-8)$$

边界条件为

$$w(l) = w(-l) = 0 \quad (4-9)$$

## 4.2 摄动方程的建立

考查式(4-1)和式(4-5)知,两式并无根本区别,以下以式(4-5)为例建立摄动方程。

式(4-5)可写成:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = - \frac{1}{EI} (H_g + H_x) w \sec \varphi + f(x) \quad (4-10)$$

将其转化为积分方程,有:

$$\frac{dw}{dx} = \int_{-l}^x \left[ - \frac{H_g + H_x}{EI} w \sec \varphi + f(x) \right] dx + A \quad (4-11)$$

$$w = \int_{-l}^x \int_{-l}^x \left[ - \frac{H_g + H_x}{EI} w \sec \varphi + f(x) \right] dx^2 + Ax + B \quad (4-12)$$

对式(4-12)进行分部积分有:

$$\begin{aligned} w = & B + Ax + x \int_{-l}^x \left[ - \frac{1}{EI} (H_g + H_x) w \sec \varphi + f(x) \right] dx \\ & - \int_{-l}^x x \left[ - \frac{1}{EI} (H_g + H_x) w \sec \varphi + f(x) \right] dx \end{aligned} \quad (4-13)$$

其中:  $A, B$  为待定常数,利用式(4-9)可得:

$$A = - \frac{1}{2} \int_{-l}^l \left[ - \frac{1}{EI} (H_g + H_x) w \sec \varphi + f(x) \right] dx$$

$$+ \frac{1}{2l} \int_{-l}^l x \left[ -\frac{1}{EI} (H_s + H_x) w \sec \varphi + f(x) \right] dx \quad (4-14)$$

$$B = -\frac{l}{2} \int_{-l}^l \left[ -\frac{1}{EI} (H_s + H_x) w \sec \varphi + f(x) \right] dx \\ + \frac{1}{2} \int_{-l}^l x \left[ -\frac{1}{EI} (H_s + H_x) w \sec \varphi + f(x) \right] dx \quad (4-15)$$

再对式(4-6)中的第一项实施分部积分:

$$\int_{-l}^l w y'' dx = w y' \Big|_{-l}^l - \int_{-l}^l \frac{dy}{dx} \frac{dw}{dx} dx \\ = - \int_{-l}^l \frac{d^2 w}{dx^2} f dx + \int_{-l}^l \frac{d^2 w}{dx^2} y dx \\ = \int_{-l}^l w'' (y - f) dx \quad (4-16)$$

将式(4-10)~(4-16)代入式(4-6)~(4-8)可得:

$$\left\{ \begin{aligned} & - \int_{-l}^l \left[ -\frac{1}{EI} (H_s + H_x) w \sec \varphi + f(x) \right] (y - y_0) dx \\ & + \frac{1}{EA} \int_{-l}^l N (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) dx \\ & - \frac{1}{EA} (N_1 + N_2) \operatorname{tg} \varphi_1 (f - y_0) = 0 \\ & \int_{-l}^l \left[ -\frac{1}{EI} (H_s + H_x) w \sec \varphi + f(x) \right] dx \\ & + \frac{1}{EA} (N_1 + N_2) \operatorname{tg} \varphi_1 = 0 \\ & \frac{1}{l} \int_{-l}^l x \left[ -\frac{1}{EI} (H_s + H_x) w \sec \varphi + f(x) \right] dx \\ & + \frac{1}{EA} (N_1 + N_2) \operatorname{tg} \varphi_1 = 0 \end{aligned} \right. \quad (4-17)$$

将式(4-14)、(4-15)和  $f(x)$  的表达式代入式(4-13)可得  $w$  的

表达式为:

$$\begin{aligned}
 w = & \frac{1}{2}(x+l) \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{EI} (H_g + H_x) w \sec \varphi + \frac{\sec \varphi}{EI} [\bar{M} + Q_x x \right. \\
 & + H_x (w_g + y - y_0) + M_x] + \frac{1}{EA} \frac{d}{dx} (N \operatorname{tg} \varphi) \Big\} dx \\
 & - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{l}\right) \int_{-1}^1 x \left\{ \frac{1}{EI} (H_g + H_x) w \sec \varphi + \frac{1}{EI} \sec \varphi [\bar{M} + Q_x x \right. \\
 & + H_x (y + w_g - y_0) + M_x] + \frac{1}{EA} \frac{d}{dx} (N \operatorname{tg} \varphi) \Big\} dx \\
 & - x \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{EI} (H_g + H_x) w \sec \varphi + \frac{1}{EI} \sec \varphi [\bar{M} \right. \\
 & + Q_x x + H_x (y + w_g - y_0) + M_x] + \frac{1}{EA} \frac{d}{dx} (N \operatorname{tg} \varphi) \Big\} dx \\
 & + \int_{-1}^1 x \left\{ \frac{1}{EI} (H_g + H_x) w \sec \varphi + \frac{1}{EI} \sec \varphi [\bar{M} \right. \\
 & + Q_x x + H_x (y + w_g - y_0) + M_x] + \frac{1}{EA} \frac{d}{dx} (N \operatorname{tg} \varphi) \Big\} dx
 \end{aligned} \tag{4-18}$$

再将  $f(x)$  的表达式代入式(4-17), 并将其整理写为以下形式:

$$\left. \begin{aligned}
 a_1 H_x + a_2 M_x + a_3 Q_x + a_p + a_w + a_n &= 0 \\
 b_1 H_x + b_2 M_x + b_3 Q_x + b_p + b_w + b_n &= 0 \\
 c_1 H_x + c_2 M_x + c_3 Q_x + c_p + c_w + c_n &= 0
 \end{aligned} \right\} \tag{4-19}$$

式中:  $a_1 = \frac{1}{EI} \int_{-1}^1 (y + w_g - y_0)^2 \sec \varphi dx$

$$a_2 = \frac{1}{EI} \int_{-1}^1 (y + w_g - y_0) \sec \varphi dx$$

$$a_3 = \frac{1}{EI} \int_{-1}^1 (y + w_g - y_0) x \sec \varphi dx$$

$$a_p = \frac{1}{EI} \int_{-1}^1 (y + w_g - y_0) \bar{M} \sec \varphi dx$$

$$a_w = \frac{1}{EI} \int_{-1}^1 (H_g + H_x) (y + w_g - y_0) w \sec \varphi dx$$

$$a_n = \frac{1}{EA} \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} (N \operatorname{tg} \varphi) (y + w_g - y_0) dx + \frac{1}{EA} \int_{-1}^1 N$$

$$\begin{aligned}
& (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) dx - \frac{1}{EA} \operatorname{tg} \varphi (N_1 + N_2) (f - y_0) \\
b_1 &= \frac{1}{EI} \int_{-l}^l (y + w_g - y_0) \sec \varphi dx \\
b_2 &= \frac{1}{EI} \int_{-l}^l \sec \varphi dx \\
b_3 &= \frac{1}{EI} \int_{-l}^l x \sec \varphi dx \\
b_p &= \frac{1}{EI} \int_{-l}^l \bar{M} \sec \varphi dx \\
b_w &= \frac{1}{EI} \int_{-l}^l (H_g + H_z) w \sec \varphi dx \\
b_n &= \frac{1}{EA} \int_{-l}^l \frac{d}{dx} (N \operatorname{tg} \varphi) dx - \frac{1}{EA} (N_1 + N_2) \operatorname{tg} \varphi \\
c_1 &= -\frac{1}{EIl} \int_{-l}^l x \sec \varphi (y + w_g - y_0) dx \\
C_2 &= -\frac{1}{EIl} \int_{-l}^l x \sec \varphi dx \\
c_3 &= -\frac{1}{EIl} \int_{-l}^l x^2 \sec \varphi dx \\
c_p &= -\frac{1}{EIl} \int_{-l}^l \bar{M} x \sec \varphi dx \\
c_w &= -\frac{1}{EIl} \int_{-l}^l w (H_g + H_z) \sec \varphi dx \\
c_n &= -\frac{1}{EA l} \int_{-l}^l x \frac{d}{dx} (N \operatorname{tg} \varphi) dx + \frac{1}{EA} (N_1 - N_2) \operatorname{tg} \varphi
\end{aligned}$$

对于对称结构,  $y$  为偶函数,  $\sec \varphi$  为偶函数,  $w_g$  亦为偶函数, 则有:

$$a_3 = b_3 = c_1 = c_2 = 0 \quad (4-20)$$

又据  $y_0$  的定义

$$\text{即} \quad y_0 = \int_{-l}^l y ds / \int_{-l}^l ds$$

$$\text{而} \quad \int_{-l}^l (y - y_0) ds = 0$$

$$\sec \varphi dx = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} dx = \sqrt{1 + y'^2} dx = ds,$$

$$\text{则} \quad a_2 = \frac{1}{EI} \int_{-l}^l (y + w_g - y_0) \sec \varphi dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{EI} \int_{-l}^l (y - y_0) \sec \varphi dx + \frac{1}{EI} \int_{-l}^l w_s \sec \varphi dx \\
&= \frac{1}{EI} \int_{-l}^l w_s \sec \varphi dx
\end{aligned} \quad (4-21)$$

同理：
$$b_1 = \frac{1}{EI} \int_{-l}^l w_s \sec \varphi dx \quad (4-22)$$

在一般情况下，可取

$$N = H_s \sec \varphi$$

$$\begin{aligned}
\text{则：} a_n &= \frac{1}{EA} \int_{-l}^l \frac{d}{dx} (N \operatorname{tg} \varphi) (y + w_s - y_0) dx + \frac{1}{EA} \\
&\quad \times \int_{-l}^l N (\operatorname{tg}^2 \varphi + 1) dx - \frac{1}{EA} \operatorname{tg} \varphi (N_1 + N_2) (f - y_0) \\
&= \frac{1}{EA} (y - y_0 + w_s) N \operatorname{tg} \varphi \Big|_{-l}^l - \frac{1}{EA} \\
&\quad \times \int_{-l}^l N \operatorname{tg} \varphi (\operatorname{tg} \varphi + w'_s) dx + \frac{1}{EA} \int_{-l}^l N (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) dx \\
&\quad - \frac{1}{EA} \operatorname{tg} \varphi (N_1 + N_2) (f - y_0) \\
&= \frac{H_s}{EA} \int_{-l}^l (1 - w'_s \operatorname{tg} \varphi) \sec \varphi dx
\end{aligned} \quad (4-23)$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{EA} \int_{-l}^l \frac{d}{dx} (N \operatorname{tg} \varphi) dx - \frac{1}{EA} (N_1 + N_2) \operatorname{tg} \varphi \\
&= \frac{1}{EA} N \operatorname{tg} \varphi \Big|_{-l}^l - \frac{1}{EA} (N_1 + N_2) \operatorname{tg} \varphi \\
&= 0
\end{aligned} \quad (4-24)$$

$$\begin{aligned}
c_n &= -\frac{1}{EAl} \int_{-l}^l x \frac{d}{dx} (N \operatorname{tg} \varphi) dx + \frac{1}{EA} (N_1 + N_2) \operatorname{tg} \varphi \\
&= -\frac{1}{EAl} x N \operatorname{tg} \varphi \Big|_{-l}^l + \frac{1}{EAl} \int_{-l}^l N \operatorname{tg} \varphi dx \\
&\quad + \frac{1}{EA} (N_1 - N_2) \operatorname{tg} \varphi \\
&= -\frac{1}{EAl} \int_{-l}^l H_s \operatorname{tg} \varphi \sec \varphi dx \\
&= 0
\end{aligned} \quad (4-25)$$

将式(4-20)~(4-25)代入式(4-19)中有：



$$\begin{cases} (a_1 + a_n)H_x + a_2M_x + a_p + a_w = 0 \\ b_1H_x + b_2M_x + b_p + b_w = 0 \\ c_3Q_x + c_p + c_w = 0 \end{cases} \quad (4-26)$$

现将式(4-18)、(4-26)中各函数及自变量无量纲化,可令:

$$\begin{aligned} h_x &= \frac{H_x f^2}{EI}, h_g = \frac{H_g f^2}{EI} \\ m_x &= \frac{M_x f}{EI}, q_x = \frac{Q_x f^2}{EI} \\ v &= \frac{w}{l}, z = \frac{y}{f}, z_0 = \frac{y_0}{f}, z_g = \frac{w_g}{f} \\ \xi &= \frac{x}{l}, p_g = \frac{p_1 f^2}{EI} \\ a(\xi) &= \frac{f^2}{EI l p} \bar{M} \end{aligned} \quad (4-27)$$

式中:  $p_1$  为外荷载值。

将式(4-27)代入式(4-26)、(4-18)可得摄动方程:

$$\begin{cases} A_1 h_x + A_2 m_x + A_p + A_w = 0 \\ B_1 h_x + B_2 m_x + B_p + B_w = 0 \\ C_3 q_x + C_p + C_w = 0 \end{cases} \quad (4-28)$$

$$\begin{aligned} v &= \frac{l}{2f}(\xi + 1) \int_{-1}^1 \sec \varphi \left[ \frac{l}{f}(h_g + h_x)v + \frac{l}{f}pa(\xi) \right. \\ &\quad \left. + h_x(z + z_g - z_0) + m_x \right] d\xi - \frac{l^2}{2f^2}(\xi + 1) \int_{-1}^1 \xi \\ &\quad \times \sec \varphi [(h_g + h_x)v + pa(\xi) + q_x \xi] d\xi - \frac{l}{f} \xi \int_{-1}^{\xi} \sec \varphi \left[ \frac{l}{f} \right. \\ &\quad \left. \times (h_g + h_x) + \frac{l}{f}pa(\xi) + h_x(z + z_g - z_0) + m_x + \frac{l}{f}q_x \xi \right] d\xi \\ &\quad + \frac{l^2}{f^2} \int_{-1}^{\xi} \sec \varphi \xi \left[ (h_g + h_x)v + pa(\xi) + \frac{l}{f}h_x(z + z_g - z_0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{f}{l}m_x + q_x \xi \right] d\xi + D(\xi)h_x \end{aligned} \quad (4-29)$$

其中:  $A_1 = l \int_{-1}^1 (z + z_g - z_0) \sec \varphi d\xi$

$$\begin{aligned}
& + \frac{II}{Af^2} \int_{-1}^1 [\sec\varphi + fz_g(\operatorname{tg}\varphi \sec\varphi)'] d\xi \\
A_z &= \frac{l}{f} \int_{-1}^1 z_g \sec\varphi d\xi \\
A_p &= \frac{l^2}{f} p \int_{-1}^1 (z + z_g - z_0) \sec\varphi \alpha(\xi) d\xi \\
A_w &= \frac{l^2}{f} \int_{-1}^1 (h_x + h_g) v \sec\varphi (z + z_g - z_0) d\xi \\
B_1 &= \frac{lf}{f^2} \int_{-1}^1 z_g \sec\varphi d\xi \\
B_2 &= \frac{l}{f} \int_{-1}^1 \sec\varphi d\xi \\
B_p &= \frac{l^2}{f^2} p \int_{-1}^1 \sec\varphi \alpha(\xi) d\xi \\
B_w &= \frac{l^2}{f^2} \int_{-1}^1 (h_x + h_g) v \sec\varphi d\xi \\
C_3 &= -\frac{l^2}{f^2} \int_{-1}^1 \xi^2 \sec\varphi d\xi \\
C_v &= -\frac{l^2}{f^2} p \int_{-1}^1 \xi \sec\varphi \alpha(\xi) d\xi \\
C_w &= -\frac{l^2}{f^2} \int_{-1}^1 \xi (h_x + h_g) \sec\varphi \cdot v d\xi \\
D(\xi) &= \frac{I}{Af^2} \sec\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_1 (1 + \xi) - \frac{I}{Af^2} \xi [\sec\varphi \operatorname{tg}\varphi \\
&\quad \times \sec\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_1] + \frac{I}{Af^2} \left[ \int_{-1}^{\xi} \xi \sec\varphi \operatorname{tg}\varphi - \sec\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_1 \right] \\
&\quad - \frac{I}{Af^2} \int_{-1}^{\xi} \sec\varphi \operatorname{tg}\varphi d\xi \\
&= -\frac{I}{Af^2} \int_{-1}^{\xi} \sec\varphi \operatorname{tg}\varphi d\xi
\end{aligned}$$

### 4.3 摄动方程的求解

现取  $p, h_g$  作为摄动参数, 将  $h_x, m_x, q_x, v$  展为  $p, h_g$  的无穷级数, 即在式(4-26)中, 令

$$h_x = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} h_{ni} h_g^n p^i$$

$$\begin{aligned}
m_{\kappa} &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} m_{ni} h_g^n p^i \\
q_{\kappa} &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} q_{ni} h_g^n p^i \\
v &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} v_{ni} h_g^n p^i
\end{aligned} \tag{4-30}$$

代入式(4-26)中可得:

$$\begin{aligned}
& A_1 \left( \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} h_{ni} h_g^n p^i \right) + A_2 \left( \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} m_{ni} h_g^n p^i \right) \\
& + F(\xi) \cdot p + \frac{l^2}{f} \left( \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} h_{ni} h_g^n p^i + h_g \right) \int_{-1}^1 \left( \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} v_{ni} h_g^n p^i \right) \sec \varphi (z + z_g - z_0) d\xi = 0 \\
& B_1 \left( \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} h_{ni} h_g^n p^i \right) + B_2 \left( \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} m_{ni} h_g^n p^i \right) \\
& + G(\xi) p + \frac{l^2}{f^2} \left( \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} h_{ni} h_g^n p^i + h_g \right) \\
& \times \int_{-1}^1 \left( \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} w_{ni} h_g^n p^i \right) \sec \varphi d\xi = 0 \\
& C_3 \left( \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} q_{ni} h_g^n p^i \right) + H(\xi) \cdot p - \frac{l^2}{f^2} \left( \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} h_{ni} h_g^n p^i + h_g \right) \\
& \times \int_{-1}^1 \left( \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} v_{ni} h_g^n p^i \right) \xi \sec \varphi d\xi = 0
\end{aligned} \tag{4-31}$$

代入式(4-29)得:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} v_{ni} h_g^n p^i &= \left( \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} h_{ni} h_g^n p^i + h_g \right) \left[ \frac{l^2}{2f^2} (\xi + 1) \right. \\
& \times \int_{-1}^1 \left( \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} v_{ni} h_g^n p^i \right) \sec \varphi (1 - \xi) d\xi \\
& - \frac{l^2}{f^2} \xi \int_{-1}^{\xi} \left( \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} w_{ni} h_g^n p^i \right) \sec \varphi d\xi + \frac{l^2}{f^2} \\
& \times \int_{-1}^{\xi} \left( \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} v_{ni} h_g^n p^i \right) \xi \sec \varphi d\xi \left. \right] + I(\xi) p \\
& + J(\xi) \left( \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} h_{ni} h_g^n p^i \right) + K(f) \left( \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} m_{ni} h_g^n p^i \right)
\end{aligned}$$

$$+ L(\xi) \left( \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} q_{ni} h_g^n p^i \right) \quad (4-32)$$

其中:

$$F(\xi) = \frac{l^2}{f} \int_{-1}^1 (z + z_g - z_0) \sec \varphi_a(\xi) d\xi$$

$$G(\xi) = \frac{l^2}{f^2} \int_{-1}^1 \sec \varphi_a(\xi) a \xi$$

$$H(\xi) = - \frac{l^2}{f^2} \int_{-1}^1 \xi \sec \varphi_a(\xi) d\xi$$

$$I(\xi) = \frac{l^2}{2f^2} (1 + \xi) \int_{-1}^1 \sec \varphi_a(\xi) (1 - \xi) d\xi \\ - \frac{l^2}{f^2} \xi \int_{-1}^{\xi} \sec \varphi_a(\xi) d\xi + \frac{l^2}{f^2} \int_{-1}^{\xi} \xi \sec \varphi_a(\xi) d\xi$$

$$J(\xi) = \frac{l}{2f} (1 + \xi) \int_{-1}^1 \sec \varphi (z + z_g - z_0) d\xi - \frac{l}{f} \xi \\ \times \int_{-1}^{\xi} \sec \varphi (z + z_g - z_0) d\xi + \frac{l}{f} \int_{-1}^{\xi} \sec \varphi \xi (z \\ + z_g - z_0) d\xi - \frac{l}{Af} \int_{-1}^{\xi} \sec \varphi g \varphi d\xi$$

$$K(\xi) = \frac{l}{2f} (\xi + 1) \int_{-1}^1 \sec \varphi d\xi - \frac{l}{f} \xi \int_{-1}^{\xi} \sec \varphi d\xi \\ + \frac{l}{f} \int_{-1}^{\xi} \sec \varphi \cdot \xi d\xi$$

$$L(\xi) = - \frac{l^2}{2f^2} (1 + \xi) \int_{-1}^1 \xi^2 \sec \varphi d\xi + \frac{l^2}{f^2} \int_{-1}^{\xi} \xi^2 \sec \varphi d\xi \\ - \frac{l^2}{f^2} \xi \int_{-1}^{\xi} \xi \sec \varphi d\xi$$

比较式(4-31), (4-32)各式等号两边  $p$  的同次幂系数, 可得:

$$A_1 \sum_{n=0}^{\infty} h_{n1} h_g^n + A_2 \sum_{n=0}^{\infty} m_{n1} h_g^n + F(\xi) + \frac{l^2}{f} h_g \int_{-1}^1 \left( \sum_{n=0}^{\infty} v_{n1} h_g^n \right) \\ \times \sec \varphi (z + z_g - z_0) d\xi = 0 \quad (4-33)$$

$$A_1 \sum_{n=0}^{\infty} h_{nm} h_g^n + A_2 \sum_{n=0}^{\infty} m_{nm} h_g^n + \frac{l^2}{f} h_g \int_{-1}^1 \left( \sum_{n=0}^{\infty} v_{nm} h_g^n \right)$$

$$\begin{aligned} & \times \sec\varphi(z + z_g - z_0)d\xi + \frac{l^2}{f} \sum_{j=1}^{m-1} \left( \sum_{n=0}^{\infty} h_{nj} h_g^n \right) \int_{-1}^1 \left( \sum_{n=0}^{\infty} v_{n,m-j} h_g^n \right) \\ & \times \sec\varphi(z + z_g - z_0)d\xi = 0 \quad (m = 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (4-34)$$

$$\begin{aligned} & B_1 \sum_{n=0}^{\infty} h_{n1} h_g^n + B_2 \sum_{n=0}^{\infty} m_{n1} h_g^n + G(\xi) \\ & + \frac{l^2}{f^2} h_g \int_{-1}^1 \left( \sum_{n=0}^{\infty} v_{n1} h_g^n \right) \sec\varphi d\xi = 0 \end{aligned} \quad (4-35)$$

$$\begin{aligned} & B_1 \sum_{n=0}^{\infty} h_{nm} h_g^n + B_2 \sum_{n=0}^{\infty} m_{nm} h_g^n + \frac{l^2}{f^2} h_g \int_{-1}^1 \left( \sum_{n=0}^{\infty} v_{nm} h_g^n \right) \sec\varphi d\xi \\ & + \frac{l^2}{f^2} \sum_{j=1}^{m-1} \left( \sum_{n=0}^{\infty} h_{nj} h_g^n \right) \int_{-1}^1 \left( \sum_{n=0}^{\infty} v_{n,m-j} h_g^n \right) \sec\varphi d\xi = 0 \\ & (m = 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (4-36)$$

$$C_3 \sum_{n=0}^{\infty} q_{n1} h_g^n + H(\xi) - \frac{l^2}{f^2} h_g \int_{-1}^1 \left( \sum_{n=0}^{\infty} v_{n1} h_g^n \right) \xi \sec\varphi d\xi = 0 \quad (4-37)$$

$$\begin{aligned} & C_3 \sum_{n=0}^{\infty} q_{nm} h_g^n - \frac{l^2}{f^2} h_g \int_{-1}^1 \left( \sum_{n=0}^{\infty} v_{nm} h_g^n \right) \xi \sec\varphi d\xi \\ & - \frac{l^2}{f^2} \sum_{j=1}^{m-1} \left( \sum_{n=0}^{\infty} h_{nj} h_g^n \right) \int_{-1}^1 \left( \sum_{n=0}^{\infty} v_{n,m-j} h_g^n \right) \xi \sec\varphi d\xi = 0 \\ & (m = 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (4-38)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} v_{n1} h_g^n &= h_g \left[ \frac{l^2}{2f^2} (\xi + 1) \int_{-1}^{\xi} \left( \sum_{n=0}^{\infty} v_{n1} h_g^n \right) \sec\varphi (1 - \xi) d\xi \right. \\ & \quad \left. - \frac{l^2}{f^2} \xi \int_{-1}^{\xi} \left( \sum_{n=0}^{\infty} v_{n1} h_g^n \right) \sec\varphi d\xi + \frac{l^2}{f^2} \int_{-1}^1 \left( \sum_{n=0}^{\infty} v_{n1} h_g^n \right) \right. \\ & \quad \left. \times \xi \sec\varphi d\xi \right] + I(\xi) + J(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} h_{n1} h_g^n + K(\xi) \\ & \quad \times \sum_{n=0}^{\infty} m_{n1} h_g^n + L(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} q_{n1} h_g^n \end{aligned} \quad (4-39)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} v_{nm} h_g^n &= h_g \left[ \frac{l^2}{2f^2} (1 + \xi) \int_{-1}^1 \left( \sum_{n=0}^{\infty} v_{nm} h_g^n \right) \sec\varphi (1 - \xi) d\xi \right. \\ & \quad \left. + \frac{l^2}{f^2} \int_{-1}^{\xi} \left( \sum_{n=0}^{\infty} v_{nm} h_g^n \right) \sec\varphi \xi d\xi - \frac{l^2}{f^2} \xi \int_{-1}^{\xi} \left( \sum_{n=0}^{\infty} v_{nm} h_g^n \right) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sec \varphi d\xi \Big] + \sum_{j=1}^{m+1} \left( \sum_{n=0}^{\infty} h_{nj} h_g^n \right) \left[ \frac{l^2}{2f^2} (1 + \xi) \int_{-1}^1 \left( \sum_{n=0}^{\infty} v_{n,m-j} \right. \right. \\
& \times h_g^n \Big) \sec \varphi (1 - \xi) d\xi - \frac{l^2}{f^2} \xi \int_{-1}^{\xi} \left( \sum_{n=0}^{\infty} v_{n,m-j} h_g^n \right) \\
& \times \sec \varphi d\xi + \frac{l^2}{f^2} \int_{-1}^{\xi} \left( \sum_{n=0}^{\infty} v_{n,m-j} h_g^n \right) \xi \sec \varphi d\xi \Big) \\
& + J(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} h_{nm} h_g^n + K(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} m_{nm} h_g^n + L(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} q_{nm} h_g^n \\
& (m = 2, 3, \dots) \tag{4-40}
\end{aligned}$$

分别比较方程(4-33)式、(4-34)式、(4-35)式和(4-36)式两边  $h$  的同次幂系数, 可得:

$$A_1 h_{o1} + A_2 m_{o1} + F(\xi) = 0 \tag{4-41}$$

$$A_1 h_{n1} + A_2 m_{n1} + \frac{l^2}{f} \int_{-1}^1 v_{n-1,1} \sec \varphi (z + z_g - z_0) d\xi = 0 \tag{4-42}$$

$$A_1 h_{om} + A_2 m_{om} + \frac{l^2}{f} \sum_{j=1}^{m-1} h_{oj} \int_{-1}^1 v_{n,m-j} \sec \varphi (z + z_g - z_0) d\xi = 0 \tag{4-43}$$

$$\begin{aligned}
& A_1 h_{nm} + A_2 m_{nm} + \frac{l^2}{f} \int_{-1}^1 v_{n-1,m} \sec \varphi (z + z_g - z_0) d\xi \\
& + \frac{l^2}{f} \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{i=0}^n h_{ij} \int_{-1}^1 v_{n-i,m-j} \sec \varphi (z + z_g - z_0) d\xi = 0 \tag{4-44}
\end{aligned}$$

$$B_1 h_{o1} + B_2 m_{o1} + G(\xi) = 0 \tag{4-45}$$

$$B_1 h_{n1} + B_2 m_{n1} + \frac{l^2}{f^2} \int_{-1}^1 v_{n-1,1} \sec \varphi d\xi = 0 \tag{4-46}$$

$$B_1 h_{om} + B_2 m_{om} + \frac{l^2}{f^2} \sum_{j=1}^{m-1} h_{oj} \int_{-1}^1 v_{n,m-j} \sec \varphi d\xi = 0 \tag{4-47}$$

$$\begin{aligned}
& B_1 h_{nm} + B_2 m_{nm} + \frac{l^2}{f^2} \int_{-1}^1 v_{n-1,m} \sec \varphi d\xi \\
& + \frac{l^2}{f^2} \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{i=0}^n h_{ij} \int_{-1}^1 v_{n-i,m-j} \sec \varphi d\xi = 0 \tag{4-48}
\end{aligned}$$

联系式(4-41)与(4-45), 式(4-42)与(4-46), 式(4-43)与(4-47), 式(4-44)与(4-48)可求得

$$\begin{aligned}
h_{01} &= [A_2 G(\xi) - B_2 F(\xi)] / (A_1 B_2 - B_1 A_2) \\
m_{01} &= [B_1 F(\xi) - A_1 G(\xi)] / (A_1 B_2 - B_1 A_2) \\
h_{n1} &= [A_2 \frac{l^2}{f^2} \int_{-1}^1 v_{n-1,1} \sec \varphi d\xi - B_2 \frac{l^2}{f} \int_{-1}^1 v_{n-1,1} \sec \varphi \\
&\quad \times (z + z_g - z_0) d\xi] / (A_1 B_2 - B_1 A_2) \\
m_{n1} &= [B_1 \frac{l^2}{f} \int_{-1}^1 v_{n-1,1} \sec \varphi (z + z_g - z_0) d\xi \\
&\quad - A_1 \frac{l^2}{f^2} \int_{-1}^1 v_{n-1,1} \sec \varphi d\xi] / (A_1 B_2 - B_1 A_2) \\
h_{0m} &= [A_2 \frac{l^2}{f^2} \sum_{j=1}^{m-1} h_{0j} \int_{-1}^1 v_{0,m-j} \sec \varphi d\xi - B_2 \frac{l^2}{f} \sum_{j=1}^{m-1} h_{0j} \\
&\quad \times \int_{-1}^1 v_{0,m-j} \sec \varphi (z + z_g - z_0) d\xi] / (A_1 B_2 - B_1 A_2) \\
m_{0m} &= [B_1 \frac{l^2}{f} \sum_{j=1}^{m-1} h_{0j} \int_{-1}^1 v_{0,m-j} \sec \varphi d\xi (z + z_g - z_0) d\xi \\
&\quad - A_1 \frac{l^2}{f^2} \sum_{j=1}^{m-1} h_{0j} \int_{-1}^1 v_{0,m-j} \sec \varphi d\xi] / (A_1 B_2 - B_1 A_2) \\
h_{nm} &= \left\{ A_2 \left[ \frac{l^2}{f^2} \int_{-1}^1 v_{n-1,m} \sec \varphi d\xi + \frac{l^2}{f^2} \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{i=0}^n h_{ij} \int_{-1}^1 v_{n-i,m-j} \right. \right. \\
&\quad \times \sec \varphi d\xi] - B_2 \left[ \frac{l^2}{f} \int_{-1}^1 v_{n-1,m} \sec \varphi (z + z_g - z_0) d\xi \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{l^2}{f} \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{i=0}^n h_{ij} \int_{-1}^1 v_{n-i,m-j} \sec \varphi (z + z_g - z_0) d\xi \right] \right\} \\
&\quad / (A_1 B_2 - B_1 A_2) \\
m_{nm} &= \left\{ B_1 \left[ \frac{l^2}{f} \int_{-1}^1 v_{n-1,m} \sec \varphi (z + z_g - z_0) d\xi + \frac{l^2}{f} \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{i=0}^n h_{ij} \right. \right. \\
&\quad \times \int_{-1}^1 v_{n-i,m-j} \sec \varphi (z + z_g - z_0) d\xi] - A_1 \left[ \frac{l^2}{f^2} \right. \\
&\quad \times \int_{-1}^1 v_{n-1,m} \sec \varphi d\xi + \frac{l^2}{f^2} \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{i=0}^n h_{ij} \int_{-1}^1 v_{n-i,m-j} \\
&\quad \left. \left. \sec \varphi d\xi \right] \right\} / (A_1 B_2 - B_1 A_2) \\
(N = 1, 2, \dots, m = 2, 3, \dots)
\end{aligned}$$

(4-49)

分别比较方程(4-37)~(4-40)式两边  $h$  的同次幂系数,可得:

$$\begin{aligned}
 q_{o1} &= -\frac{H(\xi)}{C_3} \\
 q_{n1} &= \frac{l^2}{f^2 C_3} \int_{-1}^1 v_{n-1,1} \sec \varphi d\xi \\
 q_{om} &= \frac{l^2}{f^2 C_3} \sum_{j=1}^{m-1} h_{oj} \int_{-1}^1 v_{o,m-j} \xi \sec \varphi d\xi \\
 q_{nm} &= \frac{l^2}{f^2 C_3} \left[ \int_{-1}^1 v_{n-1,m} \xi \sec \varphi d\xi + \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{i=0}^n h_{ij} \int_{-1}^1 v_{n-i,m-j} \xi \sec \varphi d\xi \right] \\
 v_{o1} &= I(\xi) + h_{o1} J(\xi) + m_{o1} K(\xi) + q_{o1} L(\xi) \\
 v_{n1} &= \frac{l^2}{2f^2} (1 + \xi) \int_{-1}^1 v_{n-1,1} \sec \varphi (1 - \xi) d\xi \\
 &\quad - \frac{l^2}{f^2} \xi \int_{-1}^{\xi} v_{n-1,1} \sec \varphi d\xi + \frac{l^2}{f^2} \int_{-1}^{\xi} v_{n-1,1} \xi \sec \varphi d\xi \\
 &\quad + h_{n1} J(\xi) + m_{n1} K(\xi) + q_{n1} L(\xi) \\
 v_{om} &= \sum_{j=1}^{m-1} h_{oj} \left[ \frac{l^2}{2f^2} (1 + \xi) \int_{-1}^1 v_{o,m-j} \sec \varphi (1 - \xi) d\xi \right. \\
 &\quad \left. - \frac{l^2}{f^2} \xi \int_{-1}^1 v_{o,m-j} \sec \varphi \xi d\xi + \frac{l^2}{f^2} \int_{-1}^{\xi} v_{o,m-j} \xi \sec \varphi d\xi \right] \\
 &\quad + h_{om} J(\xi) + m_{om} K(\xi) + q_{om} L(\xi) \\
 v_{nm} &= \frac{l^2}{2f^2} (1 + \xi) \int_{-1}^1 v_{n-1,m} \sec \varphi (1 - \xi) d\xi - \frac{l^2}{f^2} \xi \\
 &\quad \int_{-1}^{\xi} v_{n-1,m} \sec \varphi d\xi + \frac{l^2}{f^2} \int_{-1}^{\xi} v_{n-1,m} \xi \sec \varphi d\xi \\
 &\quad + \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{i=0}^n h_{ij} \left[ \frac{l^2}{2f^2} (1 + \xi) \int_{-1}^1 v_{n-i,m-j} \sec \varphi (1 - \xi) d\xi \right. \\
 &\quad \left. - \frac{l^2}{f^2} \xi \int_{-1}^1 v_{n-i,m-j} \sec \varphi d\xi + \frac{l^2}{f^2} \int_{-1}^{\xi} v_{n-i,m-j} \right. \\
 &\quad \left. \xi \sec \varphi d\xi \right] + h_{nm} J(\xi) + m_{nm} K(\xi) + q_{nm} L(\xi)
 \end{aligned}$$

$$(n = 1, 2, \dots; m = 2, 3, \dots) \quad (4-50)$$

求解方程,即可求得  $h_{ij}, m_{ij}, q_{ij}$  和  $v_{ij}$ ,代入式(4-30),可求得无量纲量  $h_x, m_x, q_x$  和  $v$ ,将比结果代入式(4-27),即可求得弹性中心处的赘余力和任一点的挠度值为



$$\left. \begin{aligned} H_x &= \frac{EI}{f^2} h_x \\ M_x &= \frac{EI}{f} m_x \\ Q_x &= \frac{EI}{f^2} q_x \\ w &= vl \end{aligned} \right\} \quad (4-51)$$

有了  $H_x, M_x, Q_x$  和  $w$  值, 即可按静力平衡方法求得拱圈任意点的内力值, 但这时注意不要忘记挠度  $w$  对内力的影响。

## 4.4 弹性理论的摄动法与力法

### 4.4.1 弹性理论的摄动法

#### 1. 基本方程

弹性理论是挠度理论的特例, 它不考虑挠度与水平推力相互作用对拱内力产生的影响。在方程(4-5)中, 令  $(H_x + H_x)w = 0$  (此时为  $H_x w = 0, H_x w = 0$ ), 则可得等截面拱求解的弹性理论基本方程

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w}{dx^2} = & -\frac{\sec \varphi}{EI} [\bar{M} + Q_x x + H_x (y - y_0) + M_x] \\ & - \frac{1}{EA} \frac{d}{dx} (N \operatorname{tg} \varphi) \end{aligned} \quad (4-52)$$

$$\begin{aligned} & - \int_{-l}^l \frac{d^2 w}{dx^2} (y - f) dx + \frac{1}{EA} \int_{-l}^l N (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) dx \\ & + \left[ -\frac{dw(l)}{dx} + \frac{dw(-l)}{dx} - \frac{1}{EA} (N_1 + N_2) \operatorname{tg} \varphi_1 \right] \\ & \times (f - y_0) = 0 \end{aligned} \quad (4-53)$$

$$-\frac{dw(l)}{dx} + \frac{dw(-l)}{dx} - \frac{1}{EA} (N_1 + N_2) \operatorname{tg} \varphi = 0 \quad (4-54)$$

$$\frac{dw(l)}{dx} + \frac{dw(-l)}{dx} + \frac{1}{EA} (N_1 - N_2) \operatorname{tg} \varphi = 0 \quad (4-55)$$

边界条件亦为:

$$w(l) = w(-l) = 0 \quad (4-56)$$

## 2. 挠度

令:

$$f(x) = -\frac{\sec\varphi}{EI}[\overline{M} + Q_x x + H_x(y - y_0) + M_x] \\ - \frac{1}{EA} \frac{d}{dx}(N \operatorname{tg}\varphi)$$

对方程(4-52)进行积分求解有:

$$w = B + Ax + x \int_{-l}^x f(x) dx - \int_{-l}^x f(x) dx \quad (4-57)$$

将上式代入边界条件式(4-56)中,可得积分常数  $A$ 、 $B$  分别为:

$$A = -\frac{1}{2} \int_{-l}^l f(x) dx + \frac{1}{2} \int_{-l}^l x f(x) dx \quad (4-58)$$

$$B = -\frac{l}{2} \int_{-l}^x f(x) dx + \frac{l}{2} \int_{-l}^x x f(x) dx \quad (4-59)$$

## 3. 赘余力

式(4-57)对  $x$  求导有:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dw}{dx} &= A + \int_{-l}^x f(x) dx \\ \frac{d^2w}{dx^2} &= f(x) \end{aligned} \right\} \quad (4-60)$$

将式(4-57)~(4-60)代入式(4-53)~(4-55)中有:

$$\left. \begin{aligned} -\int_{-l}^x f(x)(y - y_0) dx + \frac{1}{EA} \int_{-l}^l N(1 \\ + \operatorname{tg}^2\varphi) dx - \frac{1}{EA} (N_1 + N_2) \operatorname{tg}\varphi_1 (f - y_0) &= 0 \\ -\int_{-l}^l f(x) dx - \frac{1}{EA} (N_1 + N_2) \operatorname{tg}\varphi_1 &= 0 \\ \frac{1}{l} \int_{-l}^l x f(x) dx + \frac{1}{EA} (N_1 - N_2) \operatorname{tg}\varphi_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-61)$$

将  $f(x)$  的表达式代入上式,并将其转化为如下三个方程:

$$\left. \begin{aligned} r_1 H_x + r_2 M_x + r_3 Q_x + r_p + r_n &= 0 \\ t_1 H_x + t_2 M_x + t_3 Q_x + t_p + t_n &= 0 \\ s_1 H_x + s_2 M_x + s_3 Q_x + s_p + s_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-62)$$

$$\text{式中: } r_1 = \frac{1}{EI} \int_{-l}^l (y - y_0)^2 \sec \varphi dx$$

$$r_2 = \frac{1}{EI} \int_{-l}^l (y - y_0) \sec \varphi dx$$

$$r_p = \frac{1}{EI} \int_{-l}^l (y - y_0) \bar{M} \sec \varphi dx$$

$$r_n = \frac{H_x}{EA} \int_{-l}^l \sec \varphi dx$$

$$t_1 = \frac{1}{EI} \int_{-l}^l (y - y_0) \sec \varphi dx$$

$$t_2 = \frac{1}{EI} \int_{-l}^l \sec \varphi dx$$

$$t_p = \frac{1}{EI} \int_{-l}^l \bar{M} \sec \varphi dx$$

$$s_3 = -\frac{1}{EIl} \int_{-l}^l x^2 \sec \varphi dx$$

$$s_p = -\frac{1}{EIl} \int_{-l}^l x M_p \sec \varphi dx$$

$$r_3 = t_3 = t_n = s_1 = s_2 = s_n = 0$$

为使方程(4-62)中的副变位  $r_2 = t_1 = 0$ , 只有

$$y_0 = \int_{-l}^l y \sec \varphi dx / \int_{-l}^l \sec \varphi dx \quad (4-63)$$

即为弹性中心位置。

#### 4. 摄动法求解

将式(4-62)中各函数及自变量无量纲化, 即令:

$$\left. \begin{aligned} h_x &= \frac{H_x f^2}{EI}, & m_x &= \frac{M_x f}{EI} \\ q_x &= \frac{Q_x f^2}{EI}, & z &= \frac{y}{f} \\ z_0 &= \frac{y_0}{f}, & \xi &= \frac{x}{l} \\ p &= \frac{p_1 f^2}{EI}, & a(\xi) &= \frac{f^2}{EIl p} \bar{M} \end{aligned} \right\} \quad (4-64)$$

代入式(4-62)可得摄动方程

$$\left. \begin{aligned} R_1 h_x + R_p &= 0 \\ T_1 m_x + T_p &= 0 \\ S_1 q_x + S_p &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-65)$$

$$\text{式中: } R_1 = l \int_{-1}^1 (z - z_0)^2 \sec \varphi d\xi + \frac{Il}{Af^2} \int_{-1}^1 \sec \varphi d\xi$$

$$R_p = \frac{l^2}{f} p \int_{-1}^1 (z - z_0) a(\xi) \sec \varphi d\xi$$

$$T_1 = \frac{l}{f} \int_{-1}^1 \sec \varphi d\xi$$

$$T_p = \frac{l^2}{f^2} p \int_{-1}^1 a(\xi) \sec \varphi d\xi$$

$$S_1 = -\frac{l^2}{f^2} \int_{-1}^1 \xi^2 \sec \varphi d\xi$$

$$S_p = -\frac{l^2}{f^2} p \int_{-1}^1 \xi \sec \varphi a(\xi) d\xi$$

以  $p$  作为摄动参数, 将  $h_x, m_x, q_x$  展为  $p$  的无穷级数, 即:

$$\left. \begin{aligned} h_x &= \sum_{i=1}^{\infty} h_i p^i \\ m_x &= \sum_{i=1}^{\infty} m_i p^i \\ q_x &= \sum_{i=1}^{\infty} q_i p^i \end{aligned} \right\} \quad (4-66)$$

代入(4-65)式有:

$$\left. \begin{aligned} R_1 \sum_{i=1}^{\infty} h_i p^i + M(\xi) p &= 0 \\ T_1 \sum_{i=1}^{\infty} m_i p^i + N(\xi) p &= 0 \\ S_1 \sum_{i=1}^{\infty} q_i p^i + V(\xi) p &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-67)$$

$$\text{其中: } M(\xi) = \frac{l^2}{f} \int_{-1}^1 (z - z_0) \sec \varphi a(\xi) d\xi$$

$$N(\xi) = \frac{l^2}{f^2} \int_{-1}^1 a(\xi) \sec \varphi d\xi$$

$$V(\xi) = - \frac{l^2}{f^2} \int_{-1}^1 \xi a(\xi) \sec \varphi d\xi$$

分别比较式(4-67)各式等号两边  $p$  的同次幂系数, 可得:

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= \frac{M(\xi)}{R_1} \\ m_1 &= -N(\xi)/T_1 \\ q_1 &= -V(\xi)/S_1 \\ h_i &= m_i = q_i = 0 \quad (i = 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (4-68)$$

再将(4-68)式代入式(4-66)后求得  $h_x, m_x$  和  $q_x$ , 再由式(4-64)求得  $H_x, M_x$  和  $Q_x$  为:

$$H_x = - \frac{1}{I} \int_{-1}^1 (y - y_0) \bar{M} \sec \varphi dx \left/ \left[ \frac{1}{I} \int_{-1}^1 (y - y_0)^2 \times \sec \varphi dx + \frac{1}{A} \int_{-1}^1 \sec \varphi dx \right] \right. \quad (4-69)$$

$$M_x = - \int_{-1}^1 \sec \varphi \bar{M} dx \left/ \int_{-1}^1 \sec \varphi dx \right. \quad (4-70)$$

$$Q_x = - \int_{-1}^1 x \sec \varphi \bar{M} dx \left/ \int_{-1}^1 x^2 \sec \varphi dx \right. \quad (4-71)$$

#### 4.4.2 力法

如图 4-1 所示的基本体系, 取  $y_0 = \int_{-1}^1 x ds / \int_{-1}^1 a ds$  [同式(4-63)]。则力法典型方程将为三个独立方程式:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} H_x + \Delta_{1p} &= 0 \\ \delta_{22} M_x + \Delta_{2p} &= 0 \\ \delta_{33} Q_x + \Delta_{3p} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-72)$$

由第一章知:

$$\delta_{ii} = \int_s \frac{M_i}{EI} ds \quad \Delta_{ip} = \int \frac{M_i \bar{M}}{EI} ds$$

$$M_1 = y - y_0 \quad M_2 = 1 \quad M_3 = x$$

求解方程(4-72)得:

$$H_x = - \frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = - \frac{\int_{-1}^1 (y - y_0) \bar{M} \sec \varphi dx}{\int_{-1}^1 (y - y_0)^2 \sec \varphi dx}$$

$$\begin{aligned}
 M_x &= -\frac{\Delta_{2p}}{\delta_{22}} = -\int_{-1}^1 \bar{M} \sec \varphi dx / \int_{-1}^1 \sec \varphi dx \\
 Q_x &= -\frac{\Delta_{3p}}{\delta_{33}} = -\int_{-1}^1 \bar{M} \sec \varphi dx / \int_{-1}^1 x^2 \sec \varphi dx \quad (4-73)
 \end{aligned}$$

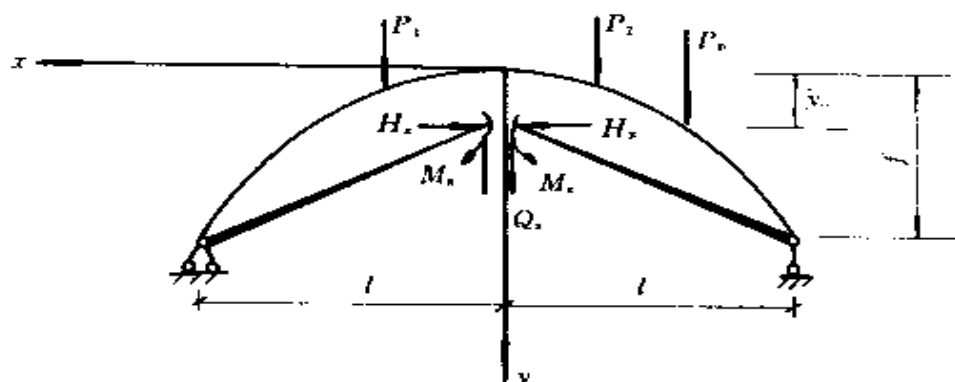


图 4-1 方法图式

比较式(4-69)~(4-71)与式(4-73)中三式可以发现,若不考虑轴力影响[(4-69)式中略去分母的第二项],则其结果是完全一致的。

## 4.5 弹性理论、线性挠度理论与非线性挠度理论

比较式(4-68)与式(4-50),可以发现,如果  $w_g = 0$ , 即  $z_g = 0$ , 则有关系式:

$$h_1 = h_{01}, m_1 = m_{01}, q_1 = q_{01}$$

进一步分析可知,在式(4-50)中,若取  $i=0, j=1$  并注意到  $w_g = 0$ , 则为等截面无铰拱的弹性理论解答。

在方程(4-5)中,若  $\frac{H_g + H_x}{EI}$  为已知值时,则内力与荷载  $p$  成线性关系,可以应用叠加原理,因而可以用影响线方法求内力,称此为线性挠度理论,否则称其为非线性挠度理论。

线性挠度理论的基本方程为:

### 1. 恒载阶段

$$\frac{d^2 w_g}{dx^2} + \frac{H}{EI} w_g \sec \varphi = f_g(x) \quad (4-74)$$

约束方程和边界条件同式(4-2)、(4-3)和式(4-4),  $H$  为弹性理论所计算的推力值, 是一已知值。

## 2. 外载阶段

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{H + H'}{EI} w \sec \varphi = f(x) \quad (4-75)$$

约束方程和边界条件同式(4-6)~(4-8)和式(4-9),  $H$  和  $H'$  分别为弹性理论所计算的恒载推力和活载推力值, 其余同式(4-5)。

用摄动法求解式(4-74)或式(4-75), 与本章所述的方法并无原则不同, 只要按照求解式(4-5)的过程, 同样可求得式(4-1)、式(4-74)和式(4-75), 在此不再赘述。

## 第五章 变截面无铰拱

$$I_x = \frac{I_d \sec \varphi}{1 - (1 - n) \frac{|x|}{l}}$$

### 时的解析解答

#### 5.1 恒载阶段

##### 5.1.1 挠曲线方程 $w_g$

将  $I_x = \frac{I_d \sec \varphi}{1 - (1 - n) \frac{|x|}{l}}$  代入式(2-53), 并令  $\beta_g^2 = \frac{H_g}{EI_d}$ , 则

有:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 w_g}{dx^2} + \beta_g^2 \left[ 1 - (1 - n) \frac{|x|}{l} \right] w_g \\ &= -\frac{1}{EI_d} [M_g + H_g(y - y_0) + \bar{M}_g] \\ & \quad \times \left[ 1 - (1 - n) \frac{|x|}{l} \right] - \frac{d}{dx} \left( \frac{N_g}{EA_x} \tan \varphi \right) \end{aligned} \quad (5-1)$$

再令  $c_g = \beta_g \frac{l}{1 - n}$ , 则上式可以改写为:

$$\frac{d^2 w_g}{dx^2} + \frac{\beta_g^2}{c_g} (c_g - \beta_g |x|) w_g = f_g(x) \quad (5-2)$$

其中:

$$\begin{aligned} f_g(x) = & -\frac{1}{EI_d} [M_g + H_g(y - y_0) + \bar{M}_g] \left[ 1 - (1 - n) \right. \\ & \left. \times \frac{|x|}{l} \right] - \frac{d}{dx} \left( \frac{N_g}{EA_x} \tan \varphi \right) \end{aligned}$$

由于恒载为对称荷载, 且拱轴曲线亦对称, 此拱挠曲线也是对



称的,故可以只给出 $[0, l]$ 范围内的解。

当  $x \geq 0$  时,式(5-2)的齐次方程可以写为:

$$\frac{d^2 w_g}{dx^2} + \frac{\beta_g^2}{c_g} (c_g - w_g x) w_g = 0 \quad (5-3)$$

$$\delta_g = c_g - \beta_g x / c_g, s_g = 1 - (1 - n) \frac{x}{l}$$

令:

$$t_g = \frac{2}{3} c_g s_g^{3/2}$$

$$w_g = s_g^{1/2} z_g$$

则:  $\frac{d^2 w_g}{dx^2} = \frac{d^2 w_g}{ds_g^2} \left( \frac{\beta_g^2}{c_g^2} \right)$  代入式(5-3)有:

$$\frac{d^2 w_g}{ds_g^2} + c_g^2 s_g w_g = 0 \quad (5-4)$$

而:  $\frac{dw_g}{ds_g} = \frac{1}{2} s_g^{-1/2} z_g + s_g c_g \frac{dz_g}{dt_g}$

$$\frac{d^2 w_g}{ds_g^2} = \left[ t_g^{2/3} \frac{d^2 z_g}{dt_g^2} + \frac{dz_g}{dt_g} t_g^{-1/3} - \frac{1}{9} z_g t_g^{-4/3} \right] \frac{3}{2} c_g t_g^{1/3}$$

将上式代入式(5-4)并注意到  $t_g$  与  $s_g$  的关系加以整理有:

$$t_g^2 \frac{d^2 z_g}{dt_g^2} + t_g \frac{dz_g}{dt_g} + \left[ t_g^2 - \left( \frac{1}{3} \right)^2 \right] z_g = 0 \quad (5-5)$$

方程(5-5)是标准的贝塞尔微分方程式(附录 II),故可以得出其齐次解为:

$$w_{g1}(t_g) = s_g^{1/2} J_{1/3}(t_g)$$

$$w_{g2}(t_g) = s_g^{1/2} J_{-1/3}(t_g)$$

若将  $w_{g1,2}$  写成  $x$  的函数,则为:

$$w_{g1}(x) = \left[ 1 - (1 - n) \frac{x}{l} \right]^{1/2} J_{1/3} \frac{2}{3} c_g \left[ 1 - (1 - n) \frac{x}{l} \right]^{3/2}$$

$$w_{g2}(x) = \left[ 1 - (1 - n) \frac{x}{l} \right]^{1/2} J_{-1/3} \frac{2}{3} c_g \left[ 1 - (1 - n) \frac{x}{l} \right]^{3/2}$$

式(5-2)的特解可用参数变异法(附录 III)求得:

$$w_g = w_{g2} \int_0^x \frac{w_{g1} f_{g1}^{(x)}}{V_{g1}} dx - w_{g1} \int_0^x \frac{w_{g2} f_{g1}^{(x)}}{V_{g1}} dx \quad (5-6)$$

其中  $V_{g1} = \frac{3\beta_g}{\pi c_g} \sin \frac{\pi}{3}$  为  $w_{g1}$  和  $w_{g2}$  的朗斯基行列式。

而:  $f_{g1}(x) = -\frac{s_g}{EI_d} [M_g + H_g(y - y_0) + \bar{M}_g] - \frac{d}{dx} \left( \frac{N_g}{EA_g} \tan \varphi \right)$

则式(5-2)的全解为:

$$\begin{aligned} w_g(x) = & A_1 w_{g1}(x) + B_1 w_{g2}(x) \\ & + w_{g2}(x) \int_0^x \frac{w_{g1}(x) f_{g1}(x)}{V_g} dx \\ & - w_{g1}(x) \int_0^x \frac{w_{g2}(x) f_{g1}(x)}{V_g} dx \end{aligned} \quad (5-7)$$

下面先给出轴力  $N_g$  的表达式:

在图 5-1 中,各力在水平方向的投影平衡有:

$$\begin{aligned} N_g \cos \varphi &= H_g - Q \sin \varphi \\ N_g &= \frac{H_g - Q \sin \varphi}{\cos \varphi} \\ &= \frac{H_g}{\cos \varphi} \left( 1 - \frac{Q}{H_g} \sin \varphi / \cos \varphi \right) \end{aligned}$$

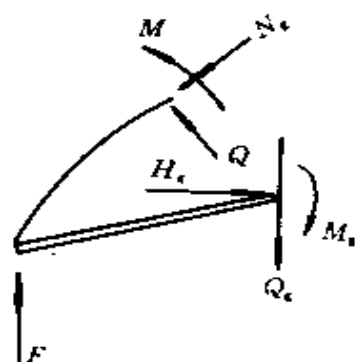


图 5-1 轴力计算图式

因为  $\frac{Q}{H_g} \sin \varphi / \cos \varphi \ll 1$ , 故可以略去不计, 则有:

$$N_g = H_g / \cos \varphi \quad (5-8)$$

式(5-8)与一般文献中所取用的公式是一致的。

现在将  $f_g$  的表达式及式(5-8)代入式(5-7)中, 并令  $K_{g1} = \frac{1}{EI_d} \frac{1}{V_{g1}}$ , 经整理可以得出突出两个未知量  $H_g, M_g$  的  $w_g(x)$  的表达式为:

$$\begin{aligned} w_g(x) = & A_1 w_{g1}(x) + B_1 w_{g2}(x) + a_1(x) \\ & + a_2(x) H_g + a_3(x) M_g \end{aligned} \quad (5-9)$$

$$\begin{aligned} \text{其中: } a_1(x) = & K_{g1} [w_{g2}(x) \int_0^x s_g w_{g1}(x) \bar{M}_g dx \\ & - w_{g1}(x) \int_0^x s_g w_{g2}(x) \bar{M}_g dx] \end{aligned}$$

$$a_2(x) = K_{g1} [w_{g2}(x) \int_0^x s_g w_{g1}(x) (y - y_0) dx$$

$$\begin{aligned}
& - w_{g1}(x) \int_0^x s_g w_{g2}(x) (y - y_0) dx + \Delta \alpha(x) \\
\alpha_3(x) = & K_{g1} [w_{g2}(x) \int_0^x s_g w_{g1}(x) dx \\
& - w_{g1}(x) \int_0^x s_g w_{g2}(x) dx] \\
\Delta \alpha(x) = & - \frac{1}{EV_{g1}} \left[ w_{g1}(x) \int_0^x \frac{\sec \varphi}{A_x} \operatorname{tg} \varphi \frac{dw_{g2}(x)}{dx} dx \right. \\
& \left. - w_{g2}(x) \int_0^x \frac{\sec \varphi}{A_x} \operatorname{tg} \varphi \frac{dw_{g1}(x)}{dx} dx \right]
\end{aligned}$$

为求得  $A_1, B_1$ , 下面给出  $\frac{dw_g(x)}{dx}$  的表达式。

$$\begin{aligned}
\frac{dw_g(x)}{dx} = & A_1 \frac{dw_{g1}(x)}{dx} + B_1 \frac{dw_{g2}(x)}{dx} + \beta_1(x) \\
& + \beta_2(x) H_g + \beta_3(x) M_g
\end{aligned} \tag{5-10}$$

其中:

$$\begin{aligned}
\beta_1(w) = & K_{g1} \left[ \frac{dw_{g2}(x)}{dx} \int_0^x s_g w_{g1}(x) \bar{M}_g dx \right. \\
& \left. - \frac{dw_{g1}(x)}{dx} \int_0^x s_g w_{g2}(x) \bar{M}_g dx \right] \\
\beta_2(x) = & K_{g1} \left[ \frac{dw_{g2}(x)}{dx} \int_0^x s_g w_{g1}(x) (y - y_0) dx \right. \\
& \left. - \frac{dw_{g1}(x)}{dx} \int_0^x s_g w_{g2}(x) (y - y_0) dx + \Delta \beta(x) \right] \\
\beta_3(X) = & K_{g1} \left[ \frac{dw_{g2}(x)}{dx} \int_0^x s_g w_{g1}(x) dx \right. \\
& \left. - \frac{dw_{g1}(x)}{dx} \int_0^x s_g w_{g2}(x) dx \right] \\
\Delta \beta(x) = & - \frac{\sec \varphi_1}{EA_x} \operatorname{tg} \varphi + \frac{1}{V_{g1}} \left[ \frac{dw_{g2}}{dx} \int_0^x \frac{\sec \varphi}{EA_x} \operatorname{tg} \varphi \right. \\
& \times \frac{dw_{g1}(x)}{dx} dx - \frac{dw_{g1}(x)}{dx} \int_0^x \frac{\sec \varphi}{EA_x} \operatorname{tg} \varphi \\
& \times \frac{dw_{g2}(x)}{dx} \cdot dx \left. \right]
\end{aligned}$$

$\frac{dw_{g1}(x)}{dx}, \frac{dw_{g2}(x)}{dx}$  的表达式如下:

由于  $s_g = 1 - (1 - n) \frac{x}{l}$

$$t_g = \frac{2}{3} c_g s_g^{3/2}$$

$$\therefore \left. \begin{aligned} w_{g1}(t_g) &= \sqrt[3]{\frac{3t_g}{2c_g}} J_{1/3}(t_g) \\ w_{g2}(t_g) &= \sqrt[3]{\frac{3t_g}{2c_g}} J_{-1/3}(t_g) \end{aligned} \right\} \quad (5-11)$$

$$\begin{aligned} \text{则: } \frac{dw_{g1}(x)}{dx} &= \frac{dw_{g1}(t_g)}{dt_g} \frac{dt_g}{dx} \\ &= -c_g \left[ 1 - (1 - n) \frac{x}{l} \right]^{1/2} \frac{1-n}{l} \sqrt[3]{\frac{3}{2c_g}} \frac{d}{dt_g} [t_g^{1/3} J_{1/3} t_g] \\ &= -c_g \left[ 1 - (1 - n) \frac{x}{l} \right]^{1/2} \frac{1-n}{l} \sqrt[3]{\frac{3}{2c_g}} t_g^{1/3} J_{-2/3} t_g \\ &= -c_g \left[ 1 - (1 - n) \frac{x}{l} \right] \frac{1-n}{l} J_{-2/3} \frac{2}{3} c_g \\ &\quad \times \left[ 1 - (1 - n) \frac{x}{l} \right]^{3/2} \end{aligned} \quad (5-12)$$

$$\begin{aligned} \text{同理可得: } \frac{dw_{g2}(x)}{dx} &= c_g \left[ 1 - (1 - n) \frac{x}{l} \right] \frac{1-n}{l} J_{2/3} \cdot \frac{2}{3} c_g \left[ 1 \right. \\ &\quad \left. - (1 - n) \frac{x}{l} \right]^{3/2} \end{aligned} \quad (5-13)$$

将式(5-9)和式(5-10)代入边界条件式:

$$\left. \begin{aligned} w_g(l) &= 0 \\ \frac{dw_g(x)}{dx} \Big|_{x=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5-14)$$

中有:

$$\left. \begin{aligned} A_1 w_{g1}(l) + B_1 w_{g2}(l) + x_1(l) + H_g x_2(l) + M_g x_3(l) &= 0 \\ A_1 \frac{dw_{g1}(0)}{dx} + B_1 \frac{dw_{g2}(0)}{dx} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5-15)$$

解方程式(5-15)得:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= m_1 + m_2 H_g + m_3 M_g \\ B_1 &= n_1 + n_2 H_g + n_3 M_g \end{aligned} \right\} \quad (5-16)$$

式中:  $m_i = -\frac{1}{\det} \left[ a_i(l) \frac{dw_{g2}(0)}{dx} \right]$

$$n_i = -\frac{1}{\det} \left[ -a_i(l) \frac{dw_{g1}(0)}{dx} \right]$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

$$\det = \begin{vmatrix} w_{g1}(l) & w_{g2}(l) \\ \frac{dw_{g1}(0)}{dx} & \frac{dw_{g2}(0)}{dx} \end{vmatrix}$$

### 5.1.2 未知赘余力

在恒载作用下,拱弹性中心的两个约束方程为式(2-67)。

将(5-9)、(5-10)及  $N_g$  的表达式代入式(2-67)有:

$$\left. \begin{aligned} &\int_0^l [A_1 w_{g1}(x) + B_1 w_{g2}(x) + a_1(x) + a_2(x) H_g \\ &+ a_3(x) M_g] y'' dx - H_g \int_0^l \frac{\sec \varphi}{EA_x} [1 + (y')^2] dx = 0 \\ &A_1 \frac{dw_{g1}(l)}{dx} + B_1 \frac{dw_{g2}(l)}{dx} + \beta_1(l) + \beta_2(l) H_g \\ &+ \beta_3(l) M_g + \frac{H_g}{EA_x} \sec \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_1 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5-17)$$

将式(5-12、13)代入式(5-17)并化简整理有:

$$\left. \begin{aligned} t_2 H_g + t_3 M_g + t_1 &= 0 \\ s_2 H_g + s_3 M_g + s_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5-18)$$

$$\text{式中: } t_2 = \int_0^l [m_2 w_{g1}(x) + n_2 w_{g2}(x) + a_2(x)] y''(x) dx \\ - \int_0^l \frac{\sec \varphi}{EA_x} [1 + y'^2] dx$$

$$t_3 = \int_0^l [m_3 w_{g1}(x) + n_3 w_{g2}(x) + a_3(x)] y'''(x) dx$$

$$t_1 = \int_0^l [m_1 w_{g1}(x) + n_1 w_{g1}(x)] y''(x) dx$$

$$s_2 = m_2 \frac{dw_{g1}(l)}{dx} + \frac{n_2 dw_{g2}(l)}{dx} + \beta_2(l) + \frac{\sec \varphi_1}{EA_1} \operatorname{tg} \varphi_1$$

$$s_3 = m_3 \frac{dw_{g1}(l)}{dx} + n_3 \frac{dw_{g2}(l)}{dx} + \beta_3(l)$$

$$s_1 = m_1 \frac{dw_{g1}(l)}{dx} + n_1 \frac{dw_{g2}(l)}{dx} + \beta_1(l)$$

## 5.2 外载阶段

将  $I_x = \frac{Id \sec \varphi}{1 - (1-n) \frac{|x|}{l}}$  代入式 (2-56), 并令  $\beta^2 =$

$\frac{H_g + H_x}{EI_d}, c = \beta \frac{l}{1-n}$ , 则有

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} + \frac{\beta^2}{c} [c - \beta |x|] w(x) = f(x) \quad (5-19)$$

$$\begin{aligned} \text{式中: } f(x) = & -\frac{1}{EI_d} \left[ 1 - (1-n) \frac{|x|}{l} \right] [M_x + H_x(y - y_0) \\ & + Q_x x + \bar{M}] - \frac{d}{dx} \left( \frac{N_x}{EA_x} \operatorname{tg} \varphi \right) \\ & - \frac{1 - (1-n) \frac{|x|}{l}}{EI_d} \frac{|x|}{l} H_g w_g \end{aligned}$$

这时, 方程式 (5-19) 可以划分为两个方程:

A: 当  $x \geq 0$  时

$$\frac{d^2 w_1(x)}{dx^2} + \frac{\beta^2}{c} [c - \beta x] w_1(x) = f_1(x) \quad (5-20)$$

$$\begin{aligned} \text{式中: } f_1(x) = & -\frac{1}{EI_d} \left[ 1 - (1-n) \frac{x}{l} \right] [M_x + H_x(y - y_0) \\ & + Q_x x + \bar{M}] - \frac{d}{dx} \left( \frac{N_x}{EA_x} \operatorname{tg} \varphi \right) \\ & - \frac{1 - (1-n) \frac{x}{l}}{EI_d} H_x w_x \end{aligned}$$

B: 当  $x \leq 0$  时

$$\frac{d^2 w_2(x)}{dx^2} + \frac{\beta^2}{c} [c + \beta x] w(x) = f_2(x) \quad (5-21)$$

$$\begin{aligned} \text{式中: } f_2(x) = & -\frac{1}{EI_d} [M_s + H_s(y - y_0) + Q_s x + \bar{M}] \\ & \times \left[ 1 + (1-n) \frac{x}{l} \right] - \frac{d}{dx} \left( \frac{N_s}{EA_s} \operatorname{tg} \varphi \right) \\ & - \frac{1 + (1-n) \frac{x}{l}}{EI_d} H_s w_g \end{aligned}$$

这时边界条件为:

$$w_1(l) = 0 \quad w_2(-l) = 0 \quad (5-22)$$

同时由(5-20)、(5-21)两式所求得的挠曲线  $w_1$ 、 $w_2$  在  $x=0$  处应是连续的, 即:

$$\left. \begin{aligned} w_1(0) &= w_2(0) \\ \frac{dw_1(0)}{dx} &= \frac{dw_2(0)}{dx} \end{aligned} \right\} \quad (5-23)$$

### 5.2.1 $x \geq 0$ 时的解答

方程(5-20)的齐次方程为:

$$\frac{d^2 w_1(x)}{dx^2} + \frac{\beta^2}{c} [c - \beta x] w_1(x) = 0 \quad (5-24)$$

$$\begin{aligned} \text{令} \quad s &= (c - \beta x)/c \\ t &= \frac{2}{3} c s^{3/2} \\ w_1 &= s^{\frac{1}{2}} z \end{aligned}$$

做与恒载阶段(本章第一节)相同的变换有:

$$t^2 \frac{d^2 z}{dt^2} + t \frac{dz}{dt} \left[ t^2 - \left( \frac{1}{3} \right)^2 \right] z = 0 \quad (5-25)$$

式(5-25)的两个特解为:

$$\begin{aligned} \varphi_1(s) &= s^{1/2} J_{1/3} \left( \frac{2}{3} c s^{3/2} \right) \\ \varphi_2(s) &= s^{1/2} J_{-1/3} \left( \frac{2}{3} c s^{3/2} \right) \end{aligned}$$

将  $s$  及  $c$  的表达式代入  $\varphi_1(c)$ 、 $\varphi_2(c)$  有:

$$\varphi_1(x) = \left[ 1 - (1-n) \frac{x}{l} \right]^{1/2} J_{1/3} \frac{2}{3} c \left[ 1 - (1-n) \frac{x}{l} \right]^{3/2}$$

$$\varphi_2(x) = \left[1 - (1-n) \frac{x}{l}\right]^{1/2} J_{1/3} \frac{2}{3} c \left[1 - (1-n) \frac{x}{l}\right]^{3/2}$$

与恒载作用相似,式(5-20)的通解为:

$$w_1(x) = A\varphi_1(x) + B\varphi_2(x) + \varphi_2(x)$$

$$\int_0^x \frac{\varphi_1(x)f_1(x)}{V_1} dx - \varphi_1(x) \int_0^x \frac{\varphi_2(x)f_1(x)}{V_1} dx \quad (5-26)$$

$$\text{其中: } V_1 = \frac{3\beta}{\pi c} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3 \sin \frac{\pi}{3}}{l\pi} (1-n)$$

将  $f_1(x)$  的表达式代入上式,并令  $K_1 = -\frac{1}{EI_d V_1}$  于是得到:

$$\begin{aligned} w_1(x) = & A\varphi_1(x) + B\varphi_2(x) + y_1(x) + H_x y_2(x) \\ & + M_x y_3(x) + Q_x y_4(x) + y_5(x) \\ & + \Delta y(x) H_x \end{aligned} \quad (5-27)$$

式中:  $A, B$  为待定常数。

$$y_1(x) = K_1 \{ \varphi_2(x) \int_0^x \varphi_1(x) \bar{M} [1 - (1-n) \frac{x}{l}] dx$$

$$- \varphi_1(x) \int_0^x \varphi_2(x) \bar{M} [1 - (1-n) \frac{x}{l}] dx \}$$

$$y_2(x) = K_1 \{ \varphi_2(x) \int_0^x \varphi_1(x) (y - y_0) [1 - (1-n) \frac{x}{l}] dx$$

$$- \varphi_1(x) \int_0^x \varphi_2(x) (y - y_0) [1 - (1-n) \frac{x}{l}] dx \}$$

$$y_3(x) = K_1 \{ \varphi_2(x) \int_0^x \varphi_1(x) [1 - (1-n) \frac{x}{l}] dx$$

$$- \varphi_1(x) \int_0^x \varphi_2(x) [1 - (1-n) \frac{x}{l}] dx \}$$

$$y_4(x) = K_1 \{ \varphi_2(x) \int_0^x \varphi_1(x) x [1 - (1-n) \frac{x}{l}] dx$$

$$- \varphi_1(x) \int_0^x \varphi_2(x) x [1 - (1-n) \frac{x}{l}] dx \}$$

$$y_5(x) = -\frac{1}{V_1} \{ \varphi_2(x) \int_0^x \varphi_1(x) \frac{d}{dx} (\frac{N_x}{EA_x} \operatorname{tg} \varphi) dx$$

$$- \varphi_1(x) \int_0^x \varphi_2(x) \frac{d}{dx} (\frac{N_x}{EA_x} \operatorname{tg} \varphi) dx \}$$

$$\Delta y(x) = K_1 \{ \varphi_2(x) \int_0^x \varphi_1(x) w_s(x) [1 - (1-n) \frac{x}{l}] dx$$



$$- \varphi_1(x) \int_0^x \varphi_2(x) w_s(x) \left[ 1 - (1-n) \frac{x}{l} \right] dx \}$$

对于  $y_s(x)$  进行分部积分, 并注意到  $\operatorname{tg} \varphi|_{x=0} = 0$  得到:

$$y_s(x) = -\frac{1}{V_1} \left[ -\varphi_2(x) \int_0^x \frac{N_s}{EA_s} \operatorname{tg} \varphi \frac{d\varphi_1(x)}{dx} dx \right. \\ \left. + \varphi_1(x) \int_0^x \frac{N_s}{EA_s} \operatorname{tg} \varphi \frac{d\varphi_2(x)}{dx} dx \right]$$

### 5.2.2 $x \leq 0$ 时的解答

与  $x \geq 0$  部分相似, 可以得到方程(5-21)的通解为:

$$w_2(x) = C\psi_1(x) + D\psi_2(x) - \psi_2(x) \int_x^0 \frac{\psi_1(x)f_2(x)}{V_2} dx \\ + \psi_1(x) \int_x^0 \frac{\psi_2(x)f_2(x)}{V_2} dx \quad (5-28)$$

其中:  $f_2(x) = -\frac{1}{EI_d} [\bar{M} + H_s(y - y_0) + M_s + Q_s x]$

$$\times \left[ 1 + (1-n) \frac{x}{l} \right] - \frac{d}{dx} \left( \frac{N_s}{EA_s} \operatorname{tg} \varphi \right) \\ - \frac{1}{EI_s} \left[ 1 + (1-n) \frac{x}{l} \right] w_s(x) H_s$$

$$\psi_1(x) = \left[ 1 + (1-n) \frac{x}{l} \right]^{1/2} J_{1/3} \frac{2}{3} C \\ \times \left[ 1 + (1-n) \frac{x}{l} \right]^{3/2}$$

$$\psi_2(x) = \left[ 1 + (1-n) \frac{x}{l} \right]^{1/2} J_{-1/3} \frac{2}{3} C \\ \times \left[ 1 + (1-n) \frac{x}{l} \right]^{3/2}$$

$$V_2 = -V_1 = -\frac{3 \sin \frac{\pi}{3}}{\pi l} (1-n)$$

比较  $\psi_1(x)$  与  $\varphi_1(x)$ ;  $\psi_2(x)$  与  $\varphi_2(x)$  可得:

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(x) &= \varphi_1(-x) \\ \psi_2(x) &= \varphi_2(-x) \end{aligned} \right\} \quad (5-29)$$

将  $f_2(x)$  的表达式及式(5-29)所表示的关系式代入式(5-28)中有:

$$\begin{aligned}
w_2(x) = & C\varphi_1(-x) + D\varphi_2(-x) + G_1(x) + H_x G_2(x) \\
& + M_x G_3(x) + Q_x G_4(x) + G_5(x) + \Delta G(x) H_x
\end{aligned} \quad (5-30)$$

式中  $C, D$  为待定常数。

$$\begin{aligned}
G_1(x) = & K_1 \{ \varphi_2(-x) \int_x^0 \varphi_1(-x) \bar{M} \left[ 1 + (1-n) \frac{x}{l} \right] dx \\
& - \varphi_1(-x) \int_x^0 \varphi_2(-x) \bar{M} \left[ 1 + (1-n) \frac{x}{l} \right] dx \} \\
G_2(x) = & K_1 \{ \varphi_2(-x) \int_x^0 \varphi_1(-x) (y - y_0) \left[ 1 + (1-n) \frac{x}{l} \right] dx \\
& - \varphi_1(-x) \int_x^0 \varphi_2(-x) (y - y_0) \left[ 1 + (1-n) \frac{x}{l} \right] dx \} \\
G_3(x) = & K_1 \{ \varphi_2(-x) \int_x^0 \varphi_1(-x) \left[ 1 + (1-n) \frac{x}{l} \right] dx \\
& - \varphi_1(-x) \int_x^0 \varphi_2(-x) \left[ 1 + (1-n) \frac{x}{l} \right] dx \} \\
G_4(x) = & K_1 \{ \varphi_2(-x) \int_x^0 \varphi_1(-x) x \left[ 1 + (1-n) \frac{x}{l} \right] dx \\
& - \varphi_1(-x) \int_x^0 \varphi_2(-x) x \left[ 1 + (1-n) \frac{x}{l} \right] dx \} \\
G_5(x) = & - \frac{1}{V_1} \left[ \varphi_2(-x) \int_x^0 \varphi_1 \frac{N_x}{EA_x} \operatorname{tg} \varphi \frac{d\varphi_1(-x)}{dx} dx \right. \\
& \left. - \varphi_1(-x) \int_x^0 \frac{N_x}{EA_x} \operatorname{tg} \varphi \frac{d\varphi_2(-x)}{dx} dx \right] \\
\Delta G(x) = & K_1 \{ \varphi_2(-x) \int_x^0 \varphi_1(-x) w_s \left[ 1 + (1-n) \frac{x}{l} \right] dx \\
& - \varphi_1(-x) \int_x^0 \varphi_2(-x) w_s \left[ 1 + (1-n) \frac{x}{l} \right] dx \}
\end{aligned}$$

比较  $G_2(x)$  与  $y_2(x)$ ,  $G_3(x)$  与  $y_3(x)$ ,  $G_4(x)$  与  $y_4(x)$  及  $\Delta G(x)$  与  $\Delta y(x)$  有:

$$\left. \begin{aligned} G_2(x) &= y_2(-x) \\ G_3(x) &= y_3(-x) \\ G_4(x) &= -y_4(-x) \\ \Delta G(x) &= \Delta y(-x) \end{aligned} \right\} \quad (5-31)$$

将式(5-31)代入式(5-30)中得到:

$$\begin{aligned}
w_2(x) = & C\varphi_1(-x) + D\varphi_2(-x) + G_1(x) \\
& + H_x y_2(-x) + M_x y_3(-x) - Q_x y_4(-x) \\
& + G_5(x) + \Delta y(-x)H_x
\end{aligned} \quad (5-32)$$

### 5.2.3 确定常数 A、B、C、D

首先来计算挠度  $w_1(x), w_2(x)$  的一阶导数。

$$\begin{aligned}
\frac{dw_1(x)}{dx} = & A \frac{d\varphi_1(x)}{dx} + B \frac{d\varphi_2(x)}{dx} \\
& + l_1(x) + l_2(x)H_x + l_3(x)M_x + l_4(x)Q_x \\
& + l_5(x) + \Delta l(x)H_x
\end{aligned} \quad (5-33)$$

式中：

$$\begin{aligned}
l_1(x) = & K_1 \left\{ \frac{d\varphi_2(x)}{dx} \int_0^x \varphi_1(x) \bar{M} \left[ 1 - (1-n) \frac{x}{l} \right] dx \right. \\
& \left. - \frac{d\varphi_1(x)}{dx} \int_0^x \varphi_2(x) \bar{M} \left[ 1 - (1-n) \frac{x}{l} \right] dx \right\} \\
l_2(x) = & K_1 \left\{ \frac{d\varphi_2(x)}{dx} \int_0^x \varphi_1(x) (y - y_0) \left[ 1 - (1-n) \frac{x}{l} \right] dx \right. \\
& \left. - \frac{d\varphi_1(x)}{dx} \int_0^x \varphi_2(x) (y - y_0) \left[ 1 - (1-n) \frac{x}{l} \right] dx \right\} \\
l_3(x) = & K_1 \left\{ \frac{d\varphi_2(x)}{dx} \int_0^x \varphi_1(x) \left[ 1 - (1-n) \frac{x}{l} \right] dx \right. \\
& \left. - \frac{d\varphi_1(x)}{dx} \int_0^x \varphi_2(x) \left[ 1 - (1-n) \frac{x}{l} \right] dx \right\} \\
l_4(x) = & K_1 \left\{ \frac{d\varphi_2(x)}{dx} \int_0^x \varphi_1(x) x \left[ 1 - (1-n) \frac{x}{l} \right] dx \right. \\
& \left. - \frac{d\varphi_1(x)}{dx} \int_0^x \varphi_2(x) x \left[ 1 - (1-n) \frac{x}{l} \right] dx \right\} \\
l_5(x) = & - \frac{N_x}{EA_x} \operatorname{tg} \varphi + \frac{1}{V_1} \left[ \frac{d\varphi_2(x)}{dx} \int_0^x \frac{N_x}{EA_x} \operatorname{tg} \varphi \frac{d\varphi_1(x)}{dx} dx \right. \\
& \left. - \frac{d\varphi_1(x)}{dx} \int_0^x \frac{N_x}{EA_x} \operatorname{tg} \varphi \frac{d\varphi_2(x)}{dx} dx \right] \\
\Delta l(x) = & K_1 \left\{ \frac{d\varphi_2(x)}{dx} \int_0^x \varphi_1(x) w_s(x) \left[ 1 - (1-n) \frac{x}{l} \right] dx \right. \\
& \left. - \frac{d\varphi_1(x)}{dx} \int_0^x \varphi_2(x) w_s(x) \left[ 1 - (1-n) \frac{x}{l} \right] dx \right\}
\end{aligned}$$

$\frac{d\varphi_1(x)}{dx}$  和  $\frac{d\varphi_2(x)}{dx}$  的表达式如下:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_1(x)}{dx} &= -c \left[ 1 - (1-n) \frac{x}{l} \right] \\ &\quad \times \frac{1-n}{l} J_{-2/3} \left( \frac{2}{3} c \left[ 1 - (1-n) \frac{x}{l} \right]^{3/2} \right) \\ \frac{d\varphi_2(x)}{dx} &= -c \left[ 1 - (1-n) \frac{x}{l} \right] \frac{1-n}{l} J_{2/3} \frac{2}{3} \\ &\quad \times c \left[ 1 - (1-n) \frac{x}{l} \right]^{3/2} \\ \frac{dw_2(x)}{dx} &= -C \frac{d\varphi_1(-x)}{dx} - D \frac{d\varphi_2(-x)}{dx} \\ &\quad + g_1(x) - H_x l_2(-x) - M_x l_3(-x) \\ &\quad + Q_x l_4(-x) + G_5(x) - \Delta l(-x) H_x\end{aligned}\quad (5-34)$$

式中:  $g_1(x) = -K_1 \left\{ -\frac{d\varphi_2(-x)}{dx} \int_x^0 \varphi_1(-x) \bar{M} \left[ 1 + (1-n) \right. \right.$

$$\left. \left. \times \frac{x}{l} \right] dx - \frac{d\varphi_1(-x)}{dx} \int_x^0 \varphi_1(-x) \bar{M} \left[ 1 - (1-n) \right] \frac{x}{l} dx \right\}$$

$$\begin{aligned}g_5(x) &= -\frac{N_x}{EA_x} \operatorname{tg} \varphi + \frac{1}{V_1} \\ &\quad \times \left[ \frac{d\varphi_2(-x)}{dx} \int_0^x \frac{N_x}{EA_x} \operatorname{tg} \varphi \frac{d\varphi_1(-x)}{dx} dx \right. \\ &\quad \left. - \frac{d\varphi_1(-x)}{dx} \int_0^x \frac{N_x}{EA_x} \operatorname{tg} \varphi \frac{d\varphi_2(x)}{dx} dx \right]\end{aligned}$$

将式(5-30)、(5-32)、(5-33)、(5-34)代入式(5-22)、(5-23)所示的四个关系式中可以得到以下方程组:

$$\left. \begin{aligned}A\varphi_1(l) + B\varphi_2(l) + y_1(l) + y_2(l)H_x + y_3(l)M_x \\ + Q_x y_4(l) + y_5(l) + \Delta y(l)H_x &= 0 \\ C\varphi_1(l) + D\varphi_2(l) + G_1(-l) + y_2(l)H_x + y_3(l)M_x \\ + Q_x y_4(l) + G_5(-l) + \Delta y(l)H_x &= 0 \\ A\varphi_1(0) + B\varphi_2(0) &= C\varphi_1(0) + D\varphi_2(0) \\ A \frac{d\varphi_1(0)}{dx} + B \frac{d\varphi_2(0)}{dx} &= -C \frac{d\varphi_1(0)}{dx} - D \frac{d\varphi_2(0)}{dx}\end{aligned} \right\} \quad (5-35)$$

解式(5-35)得到:

$$\left. \begin{aligned} A &= -\frac{1}{2} \left[ P\varphi_2(0) + R \frac{d\varphi_2(0)}{dx} \right] \\ B &= \frac{1}{2} \left[ P\varphi_1(0) + R \frac{d\varphi_1(0)}{dx} \right] \\ C &= \frac{1}{2} \left[ P\varphi_2(0) - R \frac{d\varphi_2(0)}{dx} \right] \\ D &= \frac{1}{2} \left[ -P\varphi_1(0) + R \frac{d\varphi_2(0)}{dx} \right] \end{aligned} \right\} \quad (5-36)$$

$$\text{式中: } P = \frac{G_1(-l) - y_1(l) - 2Q_x y_4(l) + G_5(l) - y_5(l)}{\det_1}$$

$$R = \{y_1(l) + G_1(l) + 2H_x[y_2(l) + \Delta y(l)] + 2M_x y_3(l) + G_5(l) + y_5(l)\} / \det_2$$

$$\det_1 = \begin{vmatrix} \varphi_1(0) & \varphi_2(0) \\ \varphi_1(l) & \varphi_2(l) \end{vmatrix} \quad \det_2 = \begin{vmatrix} \varphi_1(l) & \frac{d\varphi_1(0)}{dx} \\ \varphi_2(l) & \frac{d\varphi_2(0)}{dx} \end{vmatrix}$$

将  $A, B, C, D$  表示成由  $M_x, H_x, Q_x$  所示的式子有:

$$\left. \begin{aligned} A &= a_1 + a_2 H_x + a_3 M_x + a_4 Q_x + a_5 \\ B &= b_1 + b_2 H_x + b_3 M_x + b_4 Q_x + b_5 \\ C &= c_1 + c_2 H_x + c_3 M_x + c_4 Q_x + c_5 \\ D &= d_1 + d_2 H_x + d_3 M_x + d_4 Q_x + d_5 \end{aligned} \right\} \quad (5-37)$$

$$\text{式中: } a_1 = -\frac{1}{2} \left[ \frac{G(-l) - y_1(l)}{\det_1} \frac{d\varphi_2(0)}{dx} + \frac{y_1(l) - G_1(-l)}{\det_2} \frac{d\varphi_2(0)}{dx} \right]$$

$$a_2 = -\frac{y_2(l) + \Delta y(l)}{\det_2} \frac{d\varphi_2(0)}{dx}$$

$$a_3 = -\frac{y_3(l)}{\det_2} \frac{d\varphi_2(0)}{dx}$$

$$a_4 = \frac{y_4(0)}{\det_1} \varphi_2(0)$$

$$\begin{aligned}
a_5 &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{G_5(-l) - y_5(l)}{\det_1} \varphi_2(0) \right. \\
&\quad \left. + \frac{y_5(l) + G_5(l)}{\det_2} \frac{d\varphi_2(0)}{dx} \right] \\
b_1 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{G_1(l) - y_1(l)}{\det_1} \varphi_1(0) + \frac{y_1(l) + G_1(-l)}{\det_2} \frac{d\varphi_1(0)}{dx} \right] \\
b_2 &= \frac{y_2(l) + \Delta y(l)}{\det_2} \frac{d\varphi_1(0)}{dx} \\
b_3 &= \frac{y_3(l)}{\det_2} \frac{d\varphi_1(0)}{dx} \\
b_4 &= -\frac{y_4(l)}{\det_1} \varphi_1(0) \\
b_5 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{G_5(-l) - y_5(l)}{\det_1} \varphi_1(0) + \frac{y_5(l) + G_5(l)}{\det_2} \frac{d\varphi_1(0)}{dx} \right] \\
c_1 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{G_1(l) - y_1(l)}{\det_1} \varphi_2(0) - \frac{y_1(l) + G_1(-l)}{\det_2} \frac{d\varphi_1(0)}{dx} \right] \\
c_2 &= a_2 \\
c_3 &= a_3 \\
c_4 &= -a_4 \\
c_5 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{G_5(-l) - y_5(-l)}{\det_1} \varphi_2(0) \right. \\
&\quad \left. - \frac{y_5(l) + G_5(-l)}{\det_2} \frac{d\varphi_2(0)}{dx} \right] \\
d_1 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{G_1(-l) - y_1(l)}{\det_1} \varphi_1(0) \right. \\
&\quad \left. + \frac{y_1(l) + G_1(-l)}{\det_2} \frac{d\varphi_1(0)}{dx} \right] \\
d_2 &= b_2 \\
d_3 &= b_3 \\
d_4 &= -b_4 \\
d_5 &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{G_5(l) - y_5(l)}{\det_1} \varphi_1(0) \right. \\
&\quad \left. + \frac{y_5(l) + G_5(-l)}{\det_2} \frac{d\varphi_1(0)}{dx} \right]
\end{aligned}$$

### 5.2.4 求未知赘余力

约束方程式(2-69)可以化为:

$$\left. \begin{aligned} & \int_{-l}^0 w_2(x) y''(x) dx + \int_0^l w_1(x) y''(x) dx \\ & - \int_{-l}^l \frac{N_x}{EA_x} (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) dx = 0 \\ & \frac{dw_1(l)}{dx} + \frac{N_1}{EA_1} \operatorname{tg} \varphi_1 = 0 \\ & \frac{dw_2(-l)}{dx} - \frac{N_2}{EA_1} \operatorname{tg} \varphi_1 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5-38)$$

将式(5-30)、(5-32)、(5-33)、(5-34)代入式(5-38)中并注意到:

$$\begin{aligned} a_2 - c_2 &= 0 & b_2 - d_2 &= 0 \\ a_3 - c_3 &= 0 & b_3 - d_3 &= 0 \\ a_4 + c_4 &= 0 & b_4 + d_4 &= 0 \end{aligned}$$

化简系数后得如下方程组

$$\left. \begin{aligned} t_2 H_x + t_3 M_x + t_1 + t_5 &= 0 \\ s_2 H_x + s_3 M_x + s_1 + s_5 &= 0 \\ u_4 Q_x + u_1 + u_5 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5-39)$$

$$\text{式中: } t_2 = -2 \int_0^l [a_2 \varphi_1(x) + b_2 \varphi_2(x) + y_2(x) + \Delta y(x)] y''(x) dx + s_2(f - y_0)$$

$$t_3 = -2 \int_0^l [a_3 \varphi_1(x) + b_3 \varphi_2(x) + y_3(x)] y''(x) dx + s_3(f - y_0)$$

$$t_4 = - \int_0^l [(a_1 + c_1) \varphi_1(x) + (b_1 + d_1) \varphi_2(x) + y_1(x)] y''(x) dx - \int_{-l}^l G_1(x) y''(x) dx + s_1(f - y_0)$$

$$t_5 = - \int_0^l [(a_5 + c_5) \varphi_1(x) + (b_5 + d_5) \varphi_2(x) + y_5(x)] y''(x) dx - \int_{-l}^0 G_5(x) y''(x) dx$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-1}^1 \frac{N_x}{EA_x} (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) dx + s_5 (f - y_0) \\
s_2 = & -2a_2 \frac{d\varphi_1(l)}{dx} - 2b_2 \frac{d\varphi_2(l)}{dx} - 2l_2(l) \\
s_3 = & -2a_3 \frac{d\varphi_1(l)}{dx} - 2b_3 \frac{d\varphi_2(l)}{dx} - 2l_3(l) \\
s_1 = & -(a_1 + c_1) \frac{d\varphi_1(l)}{dx} - (b_1 + d_1) \frac{d\varphi_2(l)}{dx} \\
& - l_1(l) + G_1(-l) \\
s_5 = & -(a_5 + c_5) \frac{d\varphi_1(l)}{dx} - (b_5 + d_5) \frac{d\varphi_2(l)}{dx} \\
& - \bar{l}_5(l) + \bar{G}_5(-l) \\
u_4 = & -2a_4 \frac{d\varphi_1(l)}{dx} - 2b_4 \frac{d\varphi_2(l)}{dx} - 2l_4(l) \\
u_1 = & -(a_1 - c_1) \frac{d\varphi_1(l)}{dx} - (b_1 - d_1) \frac{d\varphi_2(l)}{dx} \\
& - l_1(l) + G_1(-l) \\
u_5 = & -(a_5 + c_5) \frac{d\varphi_1(l)}{dx} - (b_5 + d_5) \frac{d\varphi_2(l)}{dx} \\
& - \bar{l}_5(l) - \bar{G}_5(-l)
\end{aligned}$$

轴力的表达式同式(5-8), 将轴力表达式代入有关含有  $N$  的式子, 则有:

$$\begin{aligned}
G_5(-x) = y_5(x) = & H_x \bar{y}_5(x) \\
\bar{y}_5(x) = & -\frac{1}{V_1} \left[ -\varphi_1(x) \int_0^x \frac{\sec \varphi}{EA_x} \operatorname{tg} \varphi \frac{d\varphi_1(x)}{dx} dx \right. \\
& \left. + \varphi_1(x) \int_0^x \frac{\sec \varphi}{EA} \operatorname{tg} \varphi \frac{d\varphi_2(x)}{dx} dx \right] \\
\bar{l}_5(x) = & -\bar{G}_5(-x) = H_x \bar{l}'_5(x) \\
\bar{l}'_5(x) = & \frac{1}{V_1} \left[ \frac{d\varphi_2(x)}{dx} \int_x^0 \frac{\sec \varphi}{EA_x} \operatorname{tg} \varphi \frac{d\varphi_1(x)}{dx} dx \right. \\
& \left. - \frac{d\varphi_1(x)}{dx} \int_0^x \frac{\sec \varphi}{EA_x} \operatorname{tg} \varphi \frac{d\varphi_2(x)}{dx} dx \right] \\
a_5 = c_5 = & H_x \bar{a}_5 \\
\bar{a}_5 = & -\frac{\bar{y}_5(l)}{\det_2} \frac{d\varphi_2(0)}{dx}
\end{aligned}$$



$$b_5 = d_5 = H_x \bar{b}_5$$

$$\bar{b}_5 = \frac{y_5(l)}{\det_2} \frac{d\varphi_1(0)}{dx}$$

方程(5-39)中的系数化为:

$$t_5 = H_x \bar{t}_5$$

$$\bar{t}_5 = -2 \int_0^l [\bar{a}_5 \varphi_1(x) + b_5 \varphi_2(x) + \bar{y}_5(x)] y''(x) dx$$

$$\bar{s}_5(f - y_0) + \int_{-l}^l \frac{\sec \varphi}{EA} (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) dx$$

$$s_5 = H_x \bar{s}_5$$

$$\bar{s}_5 = -2a_5 \frac{d\varphi_1(l)}{dx} - 2b_5 \frac{d\varphi_2(l)}{dx} - 2l_5(l)$$

$$u_5 = 0$$

于是得解赘余力方程组为:

$$\left. \begin{aligned} (t_2 + t_5)H_x + t_3 M_x + t_1 &= 0 \\ (s_2 + s_5)H_x + s_3 M_x + s_1 &= 0 \\ u_4 Q_x + u_5 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5-40)$$

## 第六章 变截面无铰拱

### —— $I_x = I_d \sec \varphi$ 时的解析解答

#### 6.1 恒载阶段

##### 6.1.1 挠曲线方程 $w_g$

将  $I_x = I_d \sec \varphi$  代入式(2-53), 并令  $\beta_g^2 = \frac{H_g}{EI_d}$ , 则有:

$$\frac{d^2 w_g(x)}{dx^2} + \beta_g^2 w_g(x) = f_{g2}(x) \quad (6-1)$$

$$\begin{aligned} \text{式中: } f_{g2}(x) = & -\frac{1}{EI_d} [M_g + H_g(y - y_0) + \bar{M}_g] \\ & - \frac{d}{dx} \left( \frac{N_g}{EA_x} \tan \varphi \right) \end{aligned}$$

方程式(6-1)的边界条件为:

$$\left. \begin{aligned} w_g(l) &= w_g(-l) = 0 \\ \frac{dw_g(0)}{dx} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-2)$$

由于恒载作用下拱的对称性, 可以只给出  $[0, l]$  范围内的解。

方程式(6-1)所对应的齐次方程为:

$$\frac{d^2 w_g(x)}{dx^2} + \beta_g^2 w_g(x) = 0 \quad (6-3)$$

其齐次解为:

$$\phi_{g1}(x) = \sin(\beta_g x), \phi_{g2}(x) = \cos(\beta_g x)$$

利用参数变异法, 可得方程式(6-1)的通解为:

$$w_g(x) = C_1 \sin(\beta_g x) + D_1 \cos(\beta_g x)$$

$$\begin{aligned}
& + \cos(\beta_g x) \int_0^x \frac{f_{g2}(x)}{V_{g2}} \sin(\beta_g x) dx \\
& - \sin(\beta_g x) \int_0^x \frac{f_{g2}(x)}{V_{g2}} \cos(\beta_g x) dx
\end{aligned} \quad (6-4)$$

式中:  $V_{g2} = \begin{vmatrix} \phi_{g1}(x) & \phi_{g2}(x) \\ \phi'_{g1}(x) & \phi'_{g2}(x) \end{vmatrix} = -\beta_g$

$C_1, D_1$  为待定常数。

将  $f_g(x)$  的表达式及式(5-8) 代入式(6-4) 中, 并令

$$\begin{aligned}
K_{g2} &= -\frac{1}{EI_d} \frac{1}{V_{g2}} = \frac{1}{EI_d \beta_g}, \text{ 则有:} \\
w_g(x) &= C_1 \sin(\beta_g x) + D_1 \cos(\beta_g x) + \alpha_1(x) \\
&+ H_g \alpha_2(x) + \alpha_3(x)
\end{aligned} \quad (6-5)$$

$$\begin{aligned}
\text{其中: } \alpha_1(x) &= K_{g2} [\cos \beta_g x \int_0^x \bar{M}_g \sin(\beta_g x) dx \\
&- \sin(\beta_g x) \int_0^x \bar{M}_g \cos(\beta_g x) dx] \\
\alpha_2(x) &= K_{g2} [\cos \beta_g x \int_0^x (y - y_0) \sin(\beta_g x) dx \\
&- \sin(\beta_g x) \int_0^x (y - y_0)_g \cos(\beta_g x) dx] \\
&+ \cos(\beta_g x) \int_0^x \frac{\text{tg} \varphi \sec \varphi}{EA_x} \cos(\beta_g x) dx \\
&- \sin(\beta_g x) \int_0^x \frac{\text{tg} \varphi \sec \varphi}{EA_x} \sin(\beta_g x) dx \\
\alpha_3(x) &= K_{g2} [\cos(\beta_g x) \int_0^x \sin(\beta_g x) dx \\
&- \sin(\beta_g x) \cdot \int_0^x \cos(\beta_g x) dx] \\
&= K_{g2} \frac{1}{\beta_g} [-1 + \cos(\beta_g x)]
\end{aligned}$$

式(6-5) 两边对  $x$  求导有:

$$\begin{aligned}
\frac{dw_g(x)}{dx} &= C_1 \beta_g \cos(\beta_g x) - D_1 \beta_g \sin(\beta_g x) + \beta_1(x) \\
&+ \beta_2(x) H_g + \beta_3(x) M_g
\end{aligned} \quad (6-6)$$

式中:  $\beta_1(x) = K_{g2} \beta_g [-\sin(\beta_g x) \int_0^x \bar{M}_g \sin(\beta_g x) dx$

$$\begin{aligned}
& - \cos(\beta_g x) \int_0^x \bar{M}_g \cos(\beta_g x) dx \Big] \\
\beta_2(x) = & K_{g2} \beta_g \Big[ - \sin(\beta_g x) \int_0^x (y - y_0) \sin(\beta_g x) dx \\
& - \cos(\beta_g x) \int_0^x (y - y_0) \cos(\beta_g x) dx \Big] \\
& + \beta_g \Big[ - \sin(\beta_g x) \int_0^x \frac{\sec \varphi}{EA_x} \operatorname{tg} \varphi \cos(\beta_g x) dx \\
& + \cos(\beta_g x) \int_0^x \frac{\operatorname{tg} \varphi \sec \varphi}{EA_x} \sin(\beta_g x) dx \Big] \\
& + \frac{\sec \varphi_1}{EA_1} \operatorname{tg} \varphi_1 \\
\beta_3(x) = & - K_{g2} \sin(\beta_g x)
\end{aligned}$$

将式(6-5)、(6-6)代入式(6-2)中,经整理有:

$$\left. \begin{aligned}
C_1 \sin(\beta_g l) + D_1 \cos(\beta_g l) + \alpha_1(l) + \alpha_2(l) H_g \\
+ \alpha_3(l) M_g = 0 \\
C_1 \beta_g - D_1 \cdot 0 = 0
\end{aligned} \right\} \quad (6-7)$$

解式(6-7)得:

$$\left. \begin{aligned}
C_1 = 0 \\
D_1 = \frac{-1}{\cos(\beta_g l)} [\alpha_1(l) + \alpha_2(l) H_g + \alpha_3(l) M_g]
\end{aligned} \right\} \quad (6-8)$$

将式(6-8)代入式(6-5)、(6-6)中,则有:

$$w_g(x) = D_1 \cos(\beta_g x) + \alpha_1(x) + H_g \alpha_2(x) + M_g \alpha_3(x) \quad (6-9)$$

$$\frac{dw_g(x)}{dx} = - D_1 \beta_g \sin(\beta_g x) + \beta_1(x) + \beta_2(x) H_g + \beta_3(x) M_g \quad (6-10)$$

### 6.1.2 未知赘余力

将式(6-9、10)代入式(2-67)所示的约束方程中,并注意到式(5-8)有:

$$\int_0^l [D_1 \cos(\beta_g x) + \alpha_1(x) + H_g \alpha_2(x) + M_g \alpha_3(x)]$$

$$\left. \begin{aligned} y'(x)dx - \int_0^l \frac{H_g \sec \varphi}{EA_x} [1 + (y')^2] dx &= 0 \\ - D_1 \beta_g \sin(\beta_g l) + \beta_1(l) + \beta_2(l) H_g + \\ \beta_3(l) M_g + \frac{H_g}{EA_1} \sec \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-11)$$

再将式(6-8)代入式(6-11)中, 结整理化简得:

$$\left. \begin{aligned} t_2 H_g + t_3 M_g + t_1 &= 0 \\ s_2 H_g + s_3 M_g + s_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-12)$$

$$\text{式中: } t_2 = \int_0^l \left[ -\frac{\cos(\beta_g x)}{\cos(\beta_g l)} a_2(l) + a_2(x) \right] y''(x) dx \\ - \int_0^l \frac{\sec \varphi}{EA_x} [1 + y(x)^2] dx$$

$$t_3 = \int_0^l \left[ -\frac{\cos(\beta_g x)}{\cos(\beta_g l)} a_3(l) + a_3(x) \right] y''(x) dx$$

$$t_1 = \int_0^l \left[ -\frac{\cos(\beta_g x)}{\cos(\beta_g l)} a_1(l) + a_1(x) \right] y''(x) dx$$

$$s_2 = \beta_g \operatorname{tg}(\beta_g l) a_2(l) + \beta_2(l) + \frac{\sec \varphi_1}{EA_1} \operatorname{tg} \varphi_1$$

$$s_3 = \beta_g \operatorname{tg}(\beta_g l) a_3(l) + \beta_3(l)$$

$$s_1 = \beta_g \operatorname{tg}(\beta_g l) a_1(l) + \beta_1(l)$$

## 6.2 外载阶段

### 6.2.1 挠曲线方程

将  $I_x = I_d \sec \varphi$  代入式(2-56) 并令  $\beta = \frac{H_g + H_x}{EI_d}$

$$\text{则有: } \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + \beta^2 w(x) = f_3(x) \quad (6-13)$$

$$\text{式中: } f_3(x) = -\frac{1}{EI_d} [M_x + H_x(y - y_0) + Q_x x + \bar{M}] \\ - \frac{d}{dx} \left( \frac{N_x}{EA_x} \operatorname{tg} \varphi \right) - \frac{H_x}{EI_d} w_g(x)$$

$$\left. \begin{aligned} w(l) = w(-l) &= 0 \\ \frac{dw(l)}{dx} = \frac{dw(-l)}{dx} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-14)$$

类似于恒载阶段,同样可以得出方程(6-13)的通解为:

$$\begin{aligned} w(x) = & E\sin(\beta x) + F\cos(\beta x) \\ & + \cos(\beta x) \int_{-l}^x \frac{f_3(x)}{V_2} \sin(\beta x) dx \\ & - \sin(\beta x) \int_{-l}^x \frac{f_3(x)}{V_2} \cos(\beta x) dx \end{aligned} \quad (6-15)$$

其中:  $V_2 = -\beta$ ,  $E, F$  为待定常数。

将  $f_3(x)$  的表达式代入式(6-15),并令  $K_2 = \frac{1}{EI_d\beta}$ ,则有:

$$\begin{aligned} w(x) = & E\sin(\beta x) + F\cos(\beta x) + \xi_1(x) + \xi_2(x)H_x + \xi_3(x)M_x \\ & + \xi_4(x)Q_x + \xi_5(x) + \Delta\xi(x)H_x \end{aligned} \quad (6-16)$$

$$\begin{aligned} \text{其中: } \xi_1(x) = & K_2 [\cos(\beta x) \int_{-1}^x \bar{M} \sin(\beta x) dx \\ & - \sin(\beta x) \cdot \int_{-1}^x \bar{M} \cos(\beta x) dx] \\ \xi_2(x) = & K_2 [\cos(\beta x) \int_{-1}^x (y - y_0) \sin(\beta x) dx \\ & - \sin(\beta x) \cdot \int_{-1}^x (y - y_0) \cos(\beta x) dx] \\ \xi_3(x) = & K_2 [\cos(\beta x) \int_{-1}^x \sin(\beta x) dx \\ & - \sin(\beta x) \int_{-1}^x \cos(\beta x) dx] \\ = & \frac{K_2}{\beta} \{-1 + \cos[\beta(x + l)]\} \\ \xi_4(x) = & K_2 [\cos(\beta x) \int_{-1}^x x \sin(\beta x) dx \\ & - \sin(\beta x) \int_{-1}^x x \cos(\beta x) dx] \\ = & \frac{K_2}{\beta} \left\{ \frac{1}{\beta^2} \sin[\beta(x + l)] - l \cos[\beta(x + l)] - x \right\} \\ \xi_5(x) = & \frac{1}{\beta} [\cos(\beta x) \int_{-1}^x \frac{d}{dx} \left( \frac{N_x}{EA_x} \operatorname{tg} \varphi \right) \sin(\beta x) dx \\ & - \sin(\beta x) \int_{-1}^x \frac{d}{dx} \left( \frac{N_x}{EA_x} \operatorname{tg} \varphi \right) \cos(\beta x) dx] \\ = & -\cos(\beta x) \int_{-1}^x \frac{N_x}{EA_x} \operatorname{tg} \varphi \cos(\beta x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sin(\beta x) \cdot \int_{-1}^x \frac{N_x}{EA_x} \operatorname{tg} \varphi \sin(\beta x) dx \\
& - \frac{1}{\beta} \sin[\beta(x+l)] \frac{N_1}{EA_1} \operatorname{tg} \varphi \\
\Delta \xi(x) = & K_2 [\cos(\beta x) \int_{-1}^x w_g(x) \sin(\beta x) dx \\
& - \sin(\beta x) \int_{-1}^x w_g(x) \cos(\beta x) dx]
\end{aligned}$$

对式(6-16)两边求导得  $\frac{dw(x)}{dx}$  的表达式为:

$$\begin{aligned}
\frac{dw(x)}{dx} = & \beta E \cos(\beta x) - \beta F \sin(\beta x) + \gamma_1(x) + \gamma_2(x) H_x \\
& + \gamma_3(x) M_x + \gamma_4(x) Q_x + \gamma_5(x) + \Delta \gamma(x) H_x \quad (6-17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{其中: } \gamma_1(x) = & K_2 \beta [-\sin(\beta x) \int_{-1}^x \bar{M} \sin(\beta x) dx \\
& - \cos(\beta x) \int_{-1}^x \bar{M} \cos(\beta x) dx] \\
\gamma_2(x) = & K_2 \beta [-\sin(\beta x) \int_{-1}^x (y - y_0) \sin(\beta x) dx \\
& - \cos(\beta x) \int_{-1}^x (y - y_0) \cos(\beta x) dx] \\
\gamma_3(x) = & -K_2 \sin[\beta(x+l)] \\
\gamma_4(x) = & \frac{K_2}{\beta} \cos[\beta(x+l)] + \beta l \sin[\beta(x+l)] - 1 \\
\gamma_5(x) = & \beta [\sin(\beta x) \int_{-1}^x \frac{N_x}{EA_x} \operatorname{tg} \varphi \cos(\beta x) dx \\
& - \cos(\beta x) \int_{-1}^x \frac{\sec \varphi}{EA_x} H_x \operatorname{tg} \varphi \sin(\beta x) dx] \\
& - \frac{N_1}{EA_1} \operatorname{tg} \varphi - \cos[\beta(x+l)] \frac{N_2}{EA_1} \operatorname{tg} \varphi \\
\Delta \gamma(x) = & K_2 \beta [-\sin(\beta x) \int_{-1}^x w_g(x) \sin(\beta x) dx \\
& - \cos(\beta x) \int_{-1}^x w_g(x) \cos(\beta x) dx]
\end{aligned}$$

将式(6-16)、(6-17)代入式(6-14)中有:

$$\left. \begin{aligned} E\sin(\beta l) + F\cos(\beta l) + \xi_1(l) + \xi_2(l)H_x + \xi_3(l)M_x \\ + \xi_4(l)Q_x + \xi_5(l) + \Delta\xi(l)H_x = 0 \\ - E\sin(\beta l) + F\cos(\beta l) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-18)$$

求解方程式(6-18)得:

$$\left. \begin{aligned} E &= -\frac{1}{2\sin(\beta l)}[\xi_1(l) + H_x\xi_2(l) + M_x\xi_3(l) \\ &\quad + Q_x\xi_4(l) + \xi_5(l) + H_x\Delta\xi(l)] \\ F &= -\frac{1}{2\cos(\beta l)}[\xi_1(l) + H_x\xi_2(l) + M_x\xi_3(l) \\ &\quad + Q_x\xi_4(l) + \xi_5(l) + H_x\Delta\xi(l)] \end{aligned} \right\} \quad (6-19)$$

### 6.2.2 未知赘余力

将式(6-16)、(6-17)代入式(2-69)所示的约束方程中有:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-1}^1 [E\sin(\beta x) + F\cos(\beta x) + \xi_1(x) + H_x\xi_2(x)H_x \\ + \xi_3(x)M_x + \xi_4(x)Q_x + \xi_5(x) + \Delta\xi(x)H_x]y''(x)dx \\ - \int_{-1}^1 \frac{N_x}{EA_x}(1 + \operatorname{tg}^2\varphi)dx = 0 \\ \beta E\cos(\beta l) - \beta F\sin(\beta l) + \gamma_1(l) + \gamma_2(l)H_x + \gamma_3(l)M_x \\ + \gamma_4(l)Q_x + \gamma_5(l) + \Delta\gamma(x)H_x + \frac{N_1}{EA_1}\operatorname{tg}\varphi_1 = 0 \\ \beta E\cos(\beta l) + \beta F\sin(\beta l) + \gamma_1(-l) + \gamma_2(-l)H_x + \gamma_3 \\ (-l)M_x + \gamma_4(-l)Q_x + \gamma_5(-l) + \Delta\gamma(-l)H_x \\ - \frac{N_2}{EA_1}\operatorname{tg}\varphi_1 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-20)$$

将  $E, F$  的表达式代入, 并对系数化简得到:

$$\left. \begin{aligned} t_2H_x + t_3M_x + t_1 + t_5 &= 0 \\ s_2H_x + s_3M_x + s_1 + s_5 &= 0 \\ u_4Q_x + u_1 + u_5 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-21)$$

$$\text{式中: } t_1 = - \int_{-1}^1 \left[ -\frac{1}{2}\xi_1(l)\frac{\cos(\beta x)}{\cos(\beta l)} + \xi_1(x) \right] y''(x)dx \\ + s_1(f - y_0)$$



$$t_2 = - \int_{-1}^1 - \frac{1}{2} [\xi_2(l) + \Delta \xi(l)] \frac{\cos(\beta x)}{\cos(\beta l)} + [\xi_2(x) + \Delta \xi(x)] y''(x) dx + s_2(f - y_0)$$

$$t_3 = - K_2 \frac{1}{\beta} \int_{-1}^1 \left( \frac{\cos(\beta x)}{\cos(\beta l)} - 1 \right) y''(x) + s_3(f - y_0)$$

$$t_5 = - \int_{-1}^1 \left[ - \frac{1}{2} \xi_5(l) \frac{\cos(\beta x)}{\cos(\beta l)} + \xi_5(x) \right] y''(x) dx + \int_{-1}^1 \frac{N_x}{EA_x} (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) dx + s_5(f - y_0)$$

$$s_1 = K_2 \beta / \cos(\beta l) \int_{-1}^1 \bar{M} \cos(\beta x) dx$$

$$s_2 = K_2 \beta / \cos(\beta l) \int_{-1}^1 (y - y_0) \cos(\beta x) dx$$

$$s_3 = 2K_2 \operatorname{tg}(\beta l)$$

$$s_5 = \frac{\beta}{\cos(\beta l)} \int_{-1}^1 \frac{N_x}{EA_x} \operatorname{tg} \varphi \sin(\beta x) dx$$

$$u_1 = \frac{K_2 \beta}{\sin(\beta l)} \int_{-1}^1 \bar{M} \sin(\beta x) dx$$

$$u_4 = 2K_2 \left[ -l \operatorname{tg}(\beta l) + \frac{1}{\beta} \right]$$

$$u_5 = - \frac{1}{\sin(\beta l)} \int_{-1}^1 \frac{N_x}{EA_x} \operatorname{tg} \varphi \cos(\beta x) dx$$

将  $N$  的表达式代入以上系数的有关式子, 则有:

$$\xi_5(x) = H_x \bar{\xi}_5(x)$$

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_5(x) = & - \cos(\beta x) \int_{-1}^x \frac{\sec \varphi}{EA_x} \operatorname{tg} \varphi \cos(\beta x) dx \\ & - \sin(\beta x) \int_{-1}^x \frac{\sec \varphi}{EA_x} \operatorname{tg} \varphi \sin(\beta x) dx \\ & - \frac{1}{\beta} \sin[\beta(x + l)] \frac{\sec \varphi_1}{EA_1} \operatorname{tg} \varphi_1 \end{aligned}$$

方程式(6-21)中的系数可以写为:

$$t_5 = H_x \bar{t}_5$$

$$\begin{aligned} \bar{t}_5 = & - \int_{-1}^1 \left[ - \frac{1}{2} \bar{\xi}_5(l) \frac{\cos(\beta x)}{\cos(\beta l)} + \bar{\xi}_5(x) \right] y''(x) dx \\ & + \int_{-1}^1 \frac{\sec \varphi}{EA_x} (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) dx + \bar{s}_5(f - y_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_3 &= H_x s_5 \\
\bar{s}_5 &= \frac{\beta}{\cos(\beta l)} \int_{-1}^1 \frac{\sec \varphi}{EA_x} \operatorname{tg} \varphi \sin(\beta x) dx \\
u_5 &= 0
\end{aligned}$$

于是, 方程式(6-21) 变为:

$$\left. \begin{aligned}
(t_2 + t_5)H_x + t_3M_x + t_1 &= 0 \\
(s_2 + s_5)H_x + s_3M_x + s_1 &= 0 \\
u_4Q_x + u_1 &= 0
\end{aligned} \right\} \quad (6-22)$$

## 第七章 变截面抛物线拱 ——

### $I_x = I_d \sec \varphi, A_x = A_d \sec \varphi$ 时的解析解答

#### 7.1 基本方程

设抛物线拱轴线方程为:

$$y = ax^2 \quad (7-1)$$

式中:  $a = f/l^2$ , 将式(7-1)代入式(2-53)或式(2-56), 并把恒载与外载均视为外荷载, 注意到  $I_x = I_d \sec \varphi, A_x = A_d \sec \varphi$ , 则有:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{H_x}{EI_d} w = f(x) \quad (7-2)$$

式中:  $\frac{H_x}{EI_d} = \beta^2$

$$f(x) = -\frac{1}{EI_d} [M_x + f_1(x)H_x + Q_x x + \bar{M}]$$

$$f_1(x) = b + ax^2$$

$$b = 2ar - y_0$$

$$r = I_d/A_d$$

$$\text{将 } y'(x) = 2ax, y''(x) = 2a, \frac{N_x}{EA_x} = \frac{H}{EA_d}, \operatorname{tg} \varphi_1 = y'(x)$$

$$|_{x=l} = 2al, \operatorname{tg} \varphi_2 = y'(x)|_{x=-l} = -2al \text{ 代入式(2-68) 中有:}$$

$$\left. \begin{aligned} 2a \int_{-l}^l w(x) dx - \frac{H_x}{EA_d} \int_{-l}^l (1 + 4a^2 x^2) dx &= 0 \\ \frac{dw(l)}{dx} + \frac{2al}{EA_d} H_x &= 0 \\ \frac{dw(-l)}{dx} - \frac{2al}{EA_d} H_x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7-3)$$

为书写方便,在本章中将  $H_x$ 、 $M_x$  和  $Q_x$  的下标去掉。

## 7.2 解析解

方程(7-2)的通解为:

$$w(x) = B\sin\beta x + C\cos\beta x + \cos\beta x \int_{-1}^x \frac{f(x)}{-\beta} \sin\beta x dx \\ - \sin\beta x \int_{-1}^x \frac{f(x)}{-\beta} \cos\beta x dx \quad (7-4)$$

将  $f(x)$  代入式(7-4),则有:

$$w(x) = B\sin\beta x + C\cos\beta x + a_1(x)M + a_2(x)H + a_3(x)Q \\ + a_4(x) \quad (7-5)$$

$$\text{式中: } a_1(x) = \frac{1}{H}[\cos\beta(l+x) - 1]$$

$$a_2(x) = \frac{b}{H}[\cos\beta(l+x) - 1] \\ + \frac{a}{H}\left[-\left(x^2 - \frac{2}{\beta^2}\right) + \left(l^2 - \frac{2}{\beta^2}\right)\cos\beta(l+x) - \frac{2l}{\beta}\beta(l+x)\right]$$

$$a_3(x) = \frac{1}{H}\left[-x + \frac{1}{\beta}\sin\beta(l+x) - l\cos\beta(l+x)\right]$$

对于不同的外荷载,  $a_4(x)$  的表达式见 7.3。

对式(7-4)微分一次有:

$$\frac{dw(x)}{dx} = B\beta\cos\beta x - C\beta\sin\beta x + \beta_1(x)M \\ + \beta_2(x)H + \beta_3(x)Q + \beta_4(x) \quad (7-6)$$

$$\text{式中: } \beta_1(x) = -\frac{\beta}{H}\sin\beta(l+x)$$

$$\beta_2(x) = -\frac{b\beta}{H}\sin\beta(l+x) + \frac{a}{H}\left[-2x - \left(l^2 - \frac{2}{\beta^2}\right) \right. \\ \left. \cdot \beta\sin\beta(l+x) - 2l\cos\beta(l+x)\right]$$

$$\beta_3(x) = \frac{1}{H}[\cos\beta(l+x) - 1 + \beta l\sin\beta(l+x)]$$

对应于  $a_4(x)$  的  $\beta_3(x)$  表达式见 7.3。

将式(7-4)代入边界条件  $w(l) = w(-l) = 0$  中有:

$$\left. \begin{aligned} B\sin\beta l + C\cos\beta l + a_1(l)M \\ + a_2(l)H + a_3(l)Q + a_4(l) = 0 \\ - B\sin\beta l + C\cos\beta l + a_1(-l)M \\ + a_2(-l)H + a_3(-l)Q + a_4(-l) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7-7)$$

由于  $a_1(-l) = a_2(-l) = a_3(-l) = a_4(-l) = 0$ , 求解式(7-7)有:

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{1}{2\sin\beta l} [a_1(l)M + a_2(l)H + a_3(l)Q + a_4(l)] \\ C &= \frac{1}{2\cos\beta l} [a_1(l)M + a_2(l)H + a_3(l)Q + a_4(l)] \end{aligned} \right\} \quad (7-8)$$

将有关表达式代入约束方程式(7-3)中, 经整理得:

$$\left. \begin{aligned} a_1M + a_2H + a_3Q + a_4H &= 0 \\ b_1M + b_2H + b_3Q + b_4H &= 0 \\ c_1M + c_2H + c_3Q + c_4H &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7-9)$$

式中:  $a_1 = \frac{2}{\beta} \cos 2\beta l \operatorname{tg} \beta l - 2l$

$$a_2 = ba_1 + ag_1 + g_2$$

$$a_3 = -\frac{1}{\beta} \sin 2\beta l + \frac{4}{\beta^2} \sin^2 \beta l$$

$$a_4 = \frac{1}{\beta} \operatorname{tg} \beta l a_4(l) + \int_{-l}^l a_4(x) dx$$

$$g_1 = -\frac{2}{3}l + \frac{4l}{\beta^2} \cos 2\beta l + \frac{2}{\beta} \left( l^2 - \frac{2}{\beta^2} \right) \cos 2\beta l \operatorname{tg} \beta l$$

$$g_2 = \frac{1}{a} r l \beta^2 \left( 1 - \frac{4}{3} a^2 l^2 \right)$$

$$b_1 = \beta (\sin 2\beta l - \operatorname{ctg} 2\beta l \sin^2 \beta l)$$

$$b_2 = bh_1 + ah_2 + h_3$$

$$b_3 = -1 - \beta l (\operatorname{ctg} 2\beta l \cos^2 2\beta l - \sin 2\beta l) + \frac{3}{2} \cos^2 2\beta l$$

$$b_4 = \frac{\beta}{2} \operatorname{ctg} 2\beta l a_4(l) + \beta_4(l)$$

$$\begin{aligned}
h_1 &= -\beta(\operatorname{ctg} 2\beta l \sin 2\beta l + \sin 2\beta l) \\
h_2 &= \frac{\beta}{2} \left( l^2 - \frac{2}{\beta^2} \right) (\cos 2\beta l \operatorname{ctg} 2\beta l - 2 \sin 2\beta l) - 3l \cos 2\beta l \\
&\quad + \left( \frac{1}{\beta} - \frac{\beta}{2} l^2 \right) \operatorname{ctg} 2\beta l - 2l \\
h_3 &= 2\beta^2 r l a \\
c_1 &= -\beta \operatorname{tg} \beta l \\
c_2 &= b c_1 + a k_1 + h_3 \\
c_3 &= -1 - \beta l \operatorname{ctg} \beta l \\
c_4 &= \frac{\beta}{\sin 2\beta l} a_4(l) \\
k_1 &= -\beta \left( l^2 - \frac{2}{\beta^2} \right) \operatorname{tg} \beta l - 2l
\end{aligned}$$

式中  $\beta_4(l)$  和  $\int_{-1}^1 a_4(x) dx$  亦在 7.3 中列出。

求解方程(7-9) 式得:

$$\left. \begin{aligned}
M &= \frac{b_3(c_2 + c_4) - c_3(b_2 + b_4)}{b_1 c_3 - c_1 b_3} H \\
Q &= \frac{c_1(b_2 + b_4) - b_1(c_2 + c_4)}{b_1 c_3 - c_1 b_3} H \\
(1 + a_1) \frac{c_1(b_2 + b_4) - b_1(c_2 + c_4)}{b_1 c_3 - c_1 b_3} H + (a_2 + a_4) &= 0
\end{aligned} \right\} \quad (7-10)$$

式(7-10)的第三式是关于  $H$  的超越方程, 求解此方程可得  $H$  值, 进而可由第一、第二式求得  $M, Q$  值。

## 7.3 参数计算

### 7.3.1 $a_4(x)$ 的表达式

$$a_4(x) = \frac{1}{EI_d \beta} \left[ \cos(\beta x) \int_{-1}^x \bar{M} \sin \beta x dx - \sin \beta x \int_{-1}^x \bar{M} \cos \beta x dx \right]$$

1. 单集中力  $P_0$ , 作用点  $x = x_0$

1)  $-l \leq x \leq x_0$

$$a_4(x) = \frac{P_0}{2H} (l - x_0) \left[ 1 + \frac{x}{l} + \frac{l}{\beta l} \sin \beta (l + x) \right]$$

$$2) x_0 \leq x \leq l$$

$$a_1(x) = \frac{P_0}{2H}(l - x_0) \left[ 1 + \frac{x_0}{l} + \frac{l}{\beta l} \sin \beta(l + x_0) \right] \\ + \frac{P_0}{2H}(l + x_0) \left[ \cos \beta(x - x_0) - \left( 1 - \frac{x_0}{l} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{\beta l} \sin \beta(x - x_0) - \frac{x_0}{l} \cos \beta(x - x_0) \right]$$

3) 当  $x_0 = 0$  时, ( $P_0$  作用于拱顶)

$$\text{右半拱: } a_4(x) = \frac{P_0 l}{2H} \left[ 1 + \frac{x}{l} + \frac{1}{\beta l} \sin \beta(l + x) \right]$$

$$\text{左半拱: } a_4(x) = \frac{P_0 l}{2H} \left[ \frac{x}{l} + \cos \beta x + \frac{1}{\beta l} (\sin \beta l - \sin \beta x) \right]$$

2. 均布荷载  $q_0$ , 作用范围  $(x_1, x_2) \longrightarrow (d, c)$

$$\text{令: } e_1 = R_1 l - \frac{c^2 - d^2}{2} q_0, e_2 = R_1 l - \frac{1}{2} q c^2, e_3 = R_1 l$$

$$f_1 = (c - d) q_0 - R_1, f_2 = c q_0 - R_1, f_3 = -R_1$$

$$g_1 = 0, g_2 = -\frac{q_0}{2}, g_3 = 0$$

$$R_1 = \frac{l + (c + d)/2}{2l} (c - d) q_0$$

$$1) -l \leq x \leq d$$

$$a_4(x) = \frac{e_1}{H} [\cos \beta(l + x) - 1] + \frac{f_1}{H} \left[ -x + \frac{1}{\beta} \sin \beta(l + x) \right. \\ \left. - l \cos \beta(l + x) \right]$$

$$2) d \leq x \leq c$$

$$a_4(x) = \frac{e_1}{H} [\cos \beta(l + d) - 1] \\ + \frac{f_1}{H} \left[ -d + \frac{1}{\beta} \sin \beta(l + d) - l \cos \beta(l + d) \right] \\ + \frac{e_2}{H} [\cos \beta(x - d) - 1] \\ + \frac{f_2}{H} \left[ -x + \frac{1}{\beta} \sin \beta(x - d) + d \cos \beta(x - d) \right] \\ + \frac{g_2}{H} \left[ -x^2 + \frac{2}{\beta^2} + (d^2 - \frac{2}{\beta^2}) \cos \beta(c - d) \right]$$

$$+ \frac{2d}{\beta} \sin \beta(x-d) \Big]$$

3)  $c \leq x \leq l$

$$\begin{aligned} a_4(x) = & \frac{e_1}{H} [\cos \beta(l+d) - 1] \\ & + \frac{f_1}{H} \left[ -d + \frac{1}{\beta} \sin \beta(l+d) - l \cos \beta(l+d) \right] \\ & + \frac{e_2}{H} [\cos \beta(c-d) - 1] \\ & + \frac{f_2}{H} \left[ -c + \frac{1}{\beta} \sin \beta(c-d) + d \cos \beta(c-d) \right] \\ & + \frac{g_2}{H} \left[ -c^2 + \frac{2}{\beta^2} + \left( d^2 - \frac{2}{\beta^2} \right) \cos \beta(c-d) \right. \\ & \left. + \frac{2d}{\beta} \sin \beta(c-d) \right] \\ & + \frac{e_3}{H} [\cos \beta(x-c) - 1] \\ & + \frac{f_3}{H} \left[ -x + \frac{1}{\beta} \sin \beta(x-c) + c \cos \beta(x-c) \right] \end{aligned}$$

4)  $q_0$  布满全跨时有:

$$\begin{aligned} a_4(x) = & \frac{q_0 l^2}{2H} [\cos \beta(x+l) - 1] - \frac{q_0}{2H} \left[ -x^2 + \frac{2}{\beta^2} \right. \\ & \left. + \left( l^2 - \frac{2}{\beta^2} \right) \cos \beta(x+l) - \frac{2l}{\beta} \sin \beta(x+l) \right] \end{aligned}$$

### 7.3.2 $\beta_4(x)$ 的表达式

$$\begin{aligned} \beta_4(x) = & \frac{1}{EI_d} \left[ -\sin \beta x \int_{-l}^x \bar{M} \sin \beta x dx \right. \\ & \left. - \cos \beta x \int_{-l}^x \bar{M} \cos \beta x dx \right] \end{aligned}$$

1. 单集中荷载  $P_0$ , 作用点  $x = x_0$ .

1)  $-l \leq x \leq x_0$

$$\beta_4(x) = \frac{P_0}{2H} (l - x_0) \left[ \frac{1}{l} + \frac{1}{l} \cos \beta(l+x) \right]$$

2)  $x_0 \leq x \leq l$

$$\beta_4(x) = \frac{P_0}{2H} (l + x_0) \left[ \left( \frac{x_0}{l} - 1 \right) \beta \sin \beta(x - x_0) \right]$$



$$+ \frac{1}{l}(l - \cos\beta(x - x_0))]$$

3)  $x_0 = 0$  时有:

$$\text{右半拱: } \beta_4(x) = \frac{P_0 l}{2H} \left[ \frac{1}{l} + \frac{1}{l} \cos\beta(l + x) \right]$$

$$\text{左半拱: } \beta_4(x) = \frac{P_0 l}{2H} \left[ \frac{1}{l} (1 - \cos\beta x) - \beta \sin\beta x \right]$$

2. 均布荷载  $q_0$ , 作用范围  $(x_1, x_2) \longrightarrow (d, c)$ 。

1)  $-l \leq x \leq d$

$$\begin{aligned} \beta_4(x) = & -\frac{e_1}{H} \beta \sin\beta(l + x) + \frac{f_1}{H} [-1 + \cos\beta(l + x) \\ & + \beta l \sin\beta(l + x)] \end{aligned}$$

2)  $d \leq x \leq c$

$$\begin{aligned} \beta_4(x) = & -\frac{e_2}{H} \sin\beta(x - d) \\ & + \frac{f_2}{H} [-1 + \cos\beta(x - d) - \beta d \sin\beta(x - d)] \\ & + \frac{g_2}{H} [-2x - (d^2 - \frac{2}{\beta^2}) \beta \sin\beta(x - d) \\ & + 2d \cos\beta(x - d)] \end{aligned}$$

3)  $c \leq x \leq l$

$$\begin{aligned} \beta_4(x) = & -\frac{e_3}{H} \beta \sin\beta(x - c) + \frac{f_3}{H} [-1 + \sin\beta(x - c) \\ & - \beta c \cos\beta(x - c)] \end{aligned}$$

4)  $q_0$  布满全跨时有

$$\begin{aligned} \beta_4(x) = & -\frac{q l^2}{2H} \beta \sin\beta(x + l) - \frac{q}{2H} \left[ -2x - \left( l^2 - \frac{2}{\beta^2} \right) \right. \\ & \left. \cdot \beta \sin\beta(x + l) - 2l \cos\beta(x + l) \right] \end{aligned}$$

### 7.3.3 $\beta_4(l)$ 的表达式

1. 单集中载  $P_0$ , 作用点  $x = x_0$

$$\begin{aligned} \beta_4(l) = & \frac{P_0(l + x_0)}{2H} \left[ \left( \frac{x_0}{l} - 1 \right) \beta \sin\beta(l - x_0) \right. \\ & \left. + \frac{1}{l} (1 - \cos\beta(l - x_0)) \right] \end{aligned}$$

当  $x_0 = 0$ , 而  $P_0$  作用于拱顶时有

$$\beta_4(l) = \frac{P_0 l}{2H} \left[ \frac{1}{l} (1 - \cos \beta l) - \beta \sin \beta l \right]$$

2. 分布荷载  $q_0$ , 作用范围  $(x_1, x_2) \rightarrow (d, c)$ 。

$$\begin{aligned} \beta_4(x) = & -\frac{l_3}{H} \beta \sin \beta (l - c) + \frac{f_3}{H} [-1 + \sin \beta (l - c) \\ & - \beta c \cos \beta (l - c)] \end{aligned}$$

当  $g_0$  布满全跨时有

$$\beta_4(l) = \frac{g_0 l}{H} (1 + \cos 2\beta l) - \frac{g_0}{H\beta} \sin 2\beta l$$

### 7.3.4 $\int_{-l}^l a_4(x) dx$ 的表达式

1. 拱顶作用单集中荷载  $P_0$

$$\int_{-l}^l a_4(x) dx = \frac{P_0 l}{2H} \left( l + \frac{2}{\beta} \sin 2\beta l \right)$$

2. 均布荷载  $q_0$  布满全跨

$$\int_{-l}^l a_4(x) dx = -\frac{2}{3H} q_0 l^3 + \frac{q_0}{H\beta^2} \left( \frac{1}{\beta} \sin 2\beta l - l \cos 2\beta l \right)$$

对于其它荷载作用下的  $a(x)$ ,  $\beta(x)$  等, 这里不再一一列出, 读者可自行推导。

## 第八章 两铰拱和三铰拱的挠度理论

### 8.1 两铰拱

#### 8.1.1 恒载阶段

##### 1. 控制方程

如图 2-9a) 所示的基本结构中, 由于为两铰拱, 只有  $H_g$ , 而无  $M_g$ , 则有

$$\begin{aligned} M(x) &= -H_g[y_0 - (y + w_g(x))] + \bar{M}_g \\ &= H_g[y - y_0] + \bar{M}_g + H_g w_g(x) \end{aligned} \quad (8-1)$$

将式(8-1)代入式(2-36)的第二式中, 则有

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w_g(x)}{dx^2} + \frac{H_g}{EI_x} w_g(x) \sec \varphi &= \frac{\sec \varphi}{EI_x} [\bar{M}_g + H_g(y - y_0)] \\ &\quad - \frac{d}{dx} \left( \frac{N_g}{EA_x} \tan \varphi \right) \end{aligned} \quad (8-2)$$

##### 2. 边界条件

$$\left. \begin{aligned} w_g(l) = w_g(-l) &= 0 \\ \frac{dw_g(0)}{dx} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8-3)$$

##### 3. 约束方程

这时, 弹性中心的约束条件为: 弹性中心的相对水平变位为零, 即

$$\delta^h = 0$$

即

$$\int_0^l w_g(x) y''(x) dx - \int_0^l \frac{N_g}{EA_x} [1 + (y')^2] dx = 0 \quad (8-4)$$

### 8.1.2 外载阶段

#### 1. 控制方程

如图 2-9b) 所示的基本结构, 则

$$\begin{aligned} M(x) &= \bar{M} + \bar{M}_g - H_x[y_0 - (y + w(x) + w_g(x))] \\ &\quad - H_g[y_0 - (y_0 + w(x) + W_g(x))] \\ &= \bar{M} + \bar{M}_g + H_x(y - y_0) + H_g(y - y_0) \\ &\quad + (H_x + H_g)w(x) + (H_x + H_g)w_g(x) \end{aligned} \quad (8-5)$$

将式(8-5)代入式(2-36)的第二式中, 则有

$$\begin{aligned} &\frac{d^2}{dx^2}[w(x) + w_g(x)] + \frac{1}{EI_x}(H_x + H_g)w(x)\sec\varphi \\ &\quad + \frac{H_x + H_g}{EI_x}\sec\varphi w_g(x) \\ &= -\frac{\sec\varphi}{EI_x}[\bar{M}_g + \bar{M} + H_x(y - y_0) + H_g(y - y_0)] \\ &\quad - \frac{d}{dx}\left(\frac{N_x + N_g}{EA_x}\operatorname{tg}\varphi\right) \end{aligned} \quad (8-6)$$

将式(8-2)代入式(8-6)中, 经整理有

$$\begin{aligned} &\frac{d^2w(x)}{dx^2} + \frac{H_x + H_g}{EI_x}w(x)\sec\varphi \\ &= -\frac{\sec\varphi}{EI_x}[\bar{M} + H_x(y - y_0)] - \frac{d}{dx}\left(\frac{N_x}{EA}\operatorname{tg}\varphi\right) \\ &\quad - \frac{H_x}{EI_x}\sec\varphi w_g(x) \end{aligned} \quad (8-7)$$

#### 2. 边界条件

$$\left. \begin{aligned} w(l) &= 0 \\ w(-l) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8-8)$$

#### 3. 约束方程

同理有

$$\int_{-l}^l w(x)y''(x)dx - \int_{-l}^l \frac{N_x}{EA_x}[1 + (y')^2]dx = 0 \quad (8-9)$$

## 8.2 三铰拱

三铰拱为静定结构, 如图 8-1 所示, 设在荷载作用下, 拱中产

生的弯矩为  $M$ , 拱脚推力为  $H$ , 则考虑推力与变形  $w(x)$  相互作用后拱的实际弯矩为:

$$M(x) = M + Hw(x) \quad (8-10)$$

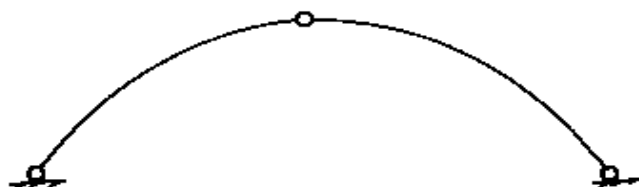


图 8-1 三铰拱

将式(8-10)代入式(2-36)的第二式中有:

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = -\frac{M + Hw(x)}{EI_x} \sec \varphi - \frac{d}{dx} \left( \frac{N_x}{EA_x} \tan \varphi \right) \quad (8-11)$$

化简得

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} + \frac{H}{EI_x} w(x) \sec \varphi = -\frac{M}{EI_x} \sec \varphi - \frac{d}{dx} \left( \frac{N_x}{EA_x} \tan \varphi \right) \quad (8-12)$$

式(8-12)为二次微分方程, 可以很方便地求解。

## 第九章 挠度理论的几个特性证明

### 9.1 挠度理论的特例——弹性理论

以往的拱桥设计理论——弹性理论是挠度理论的特例,该理论不考虑拱脚推力  $H(H_g)$  与拱轴挠度  $w(w_g)$  的相互作用对拱内力的影响,且将轴力对基本方程的贡献分离出来单独考虑。这里先不将轴力分离,在方程式(2-53)中,令  $H_g w_g = 0$ ; 式(2-56)中,令  $(H_x + H_g)w = 0$ ,则可得求解拱内力的基本方程为

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w_g}{dx^2} = & -\frac{\sec \varphi}{EI_x} [M_g + H_g(y - y_0) + \bar{M}_g] \\ & - \frac{d}{dx} \left( \frac{N_g}{EA_x} \operatorname{tg} \varphi \right) \end{aligned} \quad (9-1)$$

或

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w}{dx^2} = & -\frac{\sec \varphi}{EI_x} [\bar{M} + H_x(y - y_0) + Q_x x + M_x] \\ & - \frac{d}{dx} \left( \frac{N}{EA_x} \operatorname{tg} \varphi \right) \end{aligned} \quad (9-2)$$

观察式(9-1)和式(9-2),两者没有原则区别,现以式(9-2)为例进行求解。

式(9-2)的边界条件为  $w(l) = w(-l) = 0$ , 约束方程同式(2-68)。

同理,方程(9-2)的解可以表示为

$$w(x) = A + Bx + x \int_{-l}^x f(x) dx - \int_{-l}^x x f(x) dx \quad (9-3)$$

式中:  $f(x) = -\frac{\sec \varphi}{EI_x} [\bar{M} + H_x(y - y_0) + M_x + Q_x x]$

$$-\frac{d}{dx}\left(\frac{N}{EA_x}\operatorname{tg}\varphi\right) \quad (9-4)$$

将式(9-3)两边对  $x$  求导得

$$\frac{dw(x)}{dx} = B + \int_{-1}^x f(x)dx$$

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = f(x)$$

将式(9-3)代入边界条件中有:

$$\left. \begin{aligned} A + Bl + l \int_{-1}^1 f(x)dx - \int_{-1}^1 xf(x)dx &= 0 \\ A - Bl &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9-5)$$

解式(9-5)得

$$\left. \begin{aligned} A &= -\frac{1}{2} \left[ l \int_{-1}^1 f(x)dx - \int_{-1}^1 xf(x)dx \right] \\ B &= -\frac{1}{2l} \left[ l \int_{-1}^1 f(x)dx - \int_{-1}^1 xf(x)dx \right] \end{aligned} \right\} \quad (9-6)$$

将式(9-3)、式(9-4)代入约束方程式(2-68)中,并注意到

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 w(x)y''(x)dx &= - \int_{-1}^1 w'(x)y'(x)dx \\ &= \int_{-1}^1 w''(x)(y-f)dx \\ &= \int_{-1}^1 f(x)(y-f)dx \end{aligned}$$

可以得到如下方程组:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x)(y-f)dx - \int_{-1}^1 \frac{N}{EA_x}(1 + \operatorname{tg}^2\varphi)dx &= 0 \\ B + \int_{-1}^1 f(x)dx + \frac{N_1}{EA_1}\operatorname{tg}\varphi_1 &= 0 \\ B - \frac{N_2}{EA_1}\operatorname{tg}\varphi_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9-7)$$

取  $I_x = \frac{I_d \sec \varphi}{[1 - (1 - n)] \frac{|x|}{l}}$ , 并将  $f(x)$  和  $B$  的表达式代入式

(9-7)得

$$\left. \begin{aligned} t_2 H_x + t_3 M_x + t_1 + t_5 &= 0 \\ s_2 H_x + s_3 M_x + s_1 &= 0 \\ u_4 Q_x + u_1 + u_5 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9-8)$$

式中:  $t_2 = \frac{1}{EI_d} \int_{-1}^1 (y - y_0)^2 [1 - (1 - n) \frac{|x|}{l}] dx$

$$t_3 = \frac{1}{EI_d} \int_{-1}^1 (y - y_0) [1 - (1 - n) \frac{|x|}{l}] dx$$

$$t_1 = \frac{1}{EI_d} \int_{-1}^1 \bar{M} (y - y_0) [1 - (1 - n) \frac{|x|}{l}] dx$$

$$t_5 = \int_{-1}^1 \frac{N}{EA_x} dx$$

$$s_2 = \frac{1}{EI_d} \int_{-1}^1 [1 - (1 - n) \frac{|x|}{l}] (y - y_0) dx$$

$$s_3 = \frac{1}{EI_d} \int_{-1}^1 [1 - (1 - n) \frac{|x|}{l}] dx$$

$$s_1 = \frac{1}{EI_d} \int_{-1}^1 \bar{M} [1 - (1 - n) \frac{|x|}{l}] dx$$

$$u_4 = \frac{1}{EI_d} \frac{1}{l} \int_{-1}^1 x^2 [1 - (1 - n) \frac{|x|}{l}] dx$$

$$u_1 = \frac{1}{EI_d} \frac{1}{l} \int_{-1}^1 x \bar{M} [1 - (1 - n) \frac{|x|}{l}] dx$$

$$u_5 = - \frac{1}{l} \int_{-1}^1 \frac{N}{EA_x} \operatorname{tg} \varphi dx$$

选择弹性中心位置,使副变位为零,即

$t_3 = s_2 = 0$ , 有:

$$y_0 = \frac{\int_{-1}^1 y [1 - (1 - n) \frac{|x|}{l}] dx}{\int_{-1}^1 [1 - (1 - n) \frac{|x|}{l}] dx} \quad (9-9)$$

拱中轴力是由弹性中心上三个未知力与荷载产生的轴向力叠加组成的,即

$$N = H_x \cos \varphi - Q_x \sin \varphi + N_p \quad (9-10)$$

式中  $N_p$  为荷载产生的轴向力。

将式(9-10)代入  $t_5, u_5$  的表达式得到



$$\left. \begin{aligned} t_5 &= \int_{-1}^1 \frac{H_x \cos \varphi}{EA_x} dx + \int_{-1}^1 \frac{N_p}{EA_x} dx \\ u_5 &= \frac{1}{l} \int_{-1}^1 \frac{Q_x}{EA_x} \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi dx - \int_{-1}^1 \frac{N_p}{EA_x} \operatorname{tg} \varphi dx \end{aligned} \right\} \quad (9-11)$$

将  $t_5, u_5$  代式(9-8)后,可解得三个未知力为

$$\left. \begin{aligned} H_x &= - \left\{ \frac{1}{I_d} \int_{-1}^1 \left[ 1 - (1-n) \frac{|x|}{l} \right] \bar{M} (y - y_0) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{-1}^1 \frac{N_p}{A_x} dx \right\} / \left\{ \frac{1}{I_d} \int_{-1}^1 (y - y_0)^2 \left[ 1 - (1-n) \frac{|x|}{l} \right] dx + \int_{-1}^1 \frac{\cos \alpha}{A_x} dx \right\} \\ M_x &= - \int_{-1}^1 \bar{M} \left[ 1 - (1-n) \frac{|x|}{l} \right] dx \\ &\quad / \int_{-1}^1 \left[ 1 - (1-n) \frac{|x|}{l} \right] dx \\ Q_x &= - \left\{ \frac{1}{I_d} \int_{-1}^1 x \bar{M} \left[ 1 - (1-n) \frac{|x|}{l} \right] dx \right. \\ &\quad \left. - \int_{-1}^1 \frac{N_p}{A_x} \operatorname{tg} \varphi dx \right\} / \left\{ \frac{1}{I_d} \int_{-1}^1 x^2 \right. \\ &\quad \left. \times \left[ 1 - (1-n) \frac{|x|}{l} \right] dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{-1}^1 \frac{1}{A_x} \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi dx \right\} \end{aligned} \right\} \quad (9-12)$$

下面按一般力法原理求出弹性中心位置及三个未知力的表达式。

按照力法原理,求解三个未知力的典型方程为

$$\left. \begin{aligned} M_x \delta_{11} + H_x \delta_{12} + Q_x \delta_{13} + \Delta_{1p} &= 0 \\ M_x \delta_{21} + H_x \delta_{22} + Q_x \delta_{23} + \Delta_{2p} &= 0 \\ M_x \delta_{31} + H_x \delta_{32} + Q_x \delta_{33} + \Delta_{3p} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9-13)$$

式中:  $\delta_{ij} = \int_s \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EI_x} ds + \int_s \frac{\bar{N}_i \bar{N}_j}{EA_x} ds$

$$\Delta_{ip} = \int_s \frac{\bar{M}_i \bar{M}}{EI_x} ds + \int_s \frac{\bar{N}_i N_p}{EA_x} ds$$

$$\bar{M}_1 = 1; \bar{M}_2 = y - y_0; \bar{M}_3 = x$$

$$\bar{N}_1 = 0; \bar{N}_2 = \cos\varphi; \bar{N}_3 = -\sin\varphi$$

由于反对称性,有

$$\left. \begin{aligned} \delta_{13} &= \delta_{31} = 0 \\ \delta_{23} &= \delta_{32} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (9-14)$$

选取弹性中心位置,使得  $\delta_{12} = \delta_{21} = 0$ ,即

$$y_0 = \frac{\int_{-1}^1 y \left[ 1 - (1-n) \frac{|x|}{l} \right] dx}{\int_{-1}^1 \left[ 1 - (1-n) \frac{|x|}{l} \right] dx} \quad (9-15)$$

这样,方程(9-13)可以写为

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}M_x + \Delta_{1p} &= 0 \\ \delta_{22}H_x + \Delta_{2p} &= 0 \\ \delta_{33}Q_x + \Delta_{3p} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9-16)$$

解方程式(9-16),并令  $Z_1 = 1 - (1-n) \frac{|x|}{l}$ ,则有:

$$\left. \begin{aligned} H_x &= - \left[ \frac{1}{I_d} \int_{-1}^1 Z_1 (y - y_0) \bar{M} dx + \int_{-1}^1 \frac{N_p}{A_x} dx \right] \\ &\quad \left/ \left[ \frac{1}{I_d} \int_{-1}^1 (y - y_0) Z_1 dx + \int_{-1}^1 \frac{\cos\varphi}{A_x} dx \right] \right. \\ M_x &= - \int_{-1}^1 Z_1 \bar{M} dx \left/ \int_{-1}^1 Z_1 dx \right. \\ Q_x &= - \left[ \frac{1}{I_d} \int_{-1}^1 x \bar{M} Z_1 dx - \int_{-1}^1 \frac{N_p}{A_x} \operatorname{tg}\varphi dx \right] \\ &\quad \left/ \left[ \frac{1}{I_d} \int_{-1}^1 x^2 Z_2 dx + \int_{-1}^1 \frac{\sin\varphi}{A} \operatorname{tg}\varphi dx \right] \right. \end{aligned} \right\} \quad (9-17)$$

比较式(9-9)和式(9-15),式(9-12)和式(9-17)可见,两种方法得出的结果是完全一致的。

## 9.2 线性挠度理论

若参数  $\beta_s(\beta)$  为已知值时,则挠度理论的控制方程均变为线

性方程,内力与荷载成线性关系,因而可以在影响线上应用叠加原理求内力,将这种情形称为线性挠度理论。

从前面的推导中知道,在恒载求解过程中, $\beta_k = \frac{H_g}{EI_d}$ ,若将弹性理论所得推力  $H_g^1$  近似作为  $H_g$  代入  $\beta_g$  中(从数值分析将知道,这对于跨径不大的桥将不会产生过大的误差),则可使整个求解过程简单化。方程组(5-18)、(6-12)、(7-10)线性化,成为恒载作用时的线性挠度理论。在外载求解中, $\beta = \frac{H_k + H_x}{EI_d}$ ,由于此时  $H_g$  为已知,若忽略  $H_x$  影响,即不考虑外载推力  $H_x$  与挠度  $w$  相互作用产生的附加弯矩  $H_x w$ ,同样变为线性挠度理论,就大多数拱桥(特别是圬工拱桥)而言,恒载推力  $H_g$  远大于外载推力  $H_x$ ,相应地  $H_x w$  的影响要比  $H_g w$  的影响小得多。当然也可以以弹性理论所得的外载推力  $H_x^1$  代替  $\beta$  中的  $H_x$ ,从而得到外载作用线性挠度理论,从数值分析中知道,一般拱桥,这两者的误差不大,但忽略  $H_x w$  的影响后,在计算上却要简单得多。

若将恒载作用下用弹性理论所得到的推力  $H_g^1$  作为唯一影响拱内力的因素,则恒载作用和外载作用下拱内力的求解可以归结为:先求得内力影响线,然后在影响线上加载进行叠加,使得计算大为方便。这时拱的线性挠度理论控制方程变为(单位荷载作用下):

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{H_g^1}{EI_x} w \sec \varphi = - \frac{\sec \varphi}{EI_x} [\bar{M} + H_x(y - y_0) + M_x + Q_x x] - \frac{d}{dx} \left( \frac{N}{EA_x} \tan \varphi \right) \quad (9-18)$$

$$\text{其中: } \bar{M} = \begin{cases} \frac{\xi + l}{2l}(l - x) & x \geq \xi \\ \frac{\xi + l}{2l}(l - x) - (\xi - x) & x \leq \xi \end{cases}$$

$\xi$  ——计算点坐标值。

边界条件和约束方程同前。求解方程(9-18)并不困难,但应注意到这时  $H_g^1$  为已知值。

### 9.3 轴向力对拱内力的影响

轴向力在挠度理论中对内力的影响不同于弹性理论,除大小有变化外,某些性质也有所改变。最明显的就是对弹性中心弯矩的影响。从式(5-39)系数  $s_5$  的表达式来看,对于反对称轴向力,由于  $\Delta G(-l) = -\Delta y(l)$ ;  $a_5 + c_5 = 0$ ,  $b_5 + d_5 = 0$  所以  $s_5 = 0$ ,这表明,反对称轴力不引起弹性中心弯矩。除此之外,  $s_5$  可能不为零。而在弹性理论中,不论什么样轴向力,都不全引起弹性中心上的弯矩。

下面来研究轴向力对拱轴线转角的影响。

由式(2-36)的第三式知,拱轴线上任一点转角的表达式为

$$\phi = \frac{dw}{dx} + \frac{N_x}{EA_x} \operatorname{tg} \varphi \quad (9-19)$$

对于弹性理论,  $\frac{dw}{dx}$  已由式(9-4)给出,则有

$$\phi = B + \int_{-l}^x f(x) dx + \frac{N_x}{EA_x} \operatorname{tg} \varphi \quad (9-20)$$

将  $B$  的表达式代入有

$$\begin{aligned} \phi = & -\frac{1}{2l} \left[ l \int_{-l}^l f(x) dx - \int_{-l}^l x f(x) dx \right] \\ & + \int_{-l}^x f(x) dx + \frac{N_x}{EA_x} \operatorname{tg} \varphi \end{aligned} \quad (9-21)$$

将式(9-20)化简,并仅取含有  $N_x$  (即轴向力)的一项,以  $\Delta\phi$  表示由  $N_x$  引起的转角,有

$$\Delta\phi = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \frac{N_x}{EA_x} \operatorname{tg} \varphi dx \quad (9-22)$$

上式表明,在弹性理论中,轴力引起的拱轴线偏角是一个定值,不随位置变化而变化,因而将不引起弹性中心的相对转角,也不会引起弹性中心的弯矩。

对于挠度理论,以第五章第2节来研究当  $x \geq 0$  时,将式(5-33)代入式(9-18),有

$$\phi = A \frac{d\phi_1(x)}{dx} + B \frac{d\phi_2(x)}{dx} + l_1(x) + l_2(x) H_x$$

$$\begin{aligned}
& + l_3(x)M_x + l_4(x)Q_x + l_5(x) \\
& + \Delta l(x)H_x + \frac{N_x}{EA_x} \operatorname{tg} \varphi
\end{aligned} \quad (9-23)$$

同样,将含有  $N_x$  的一项取出,可得

$$\Delta \phi = a_5 \frac{d\phi_1(x)}{dx} + b_5 \frac{d\phi_2(x)}{dx} + l_5(x) + \frac{N_x}{EA_x} \operatorname{tg} \varphi \quad (9-24)$$

上式表明,轴线由于  $N_x$  引起的转角除了与  $N_x$  有关外,还随着坐标  $x$  的变化而变化。 $\Delta \phi$  在两拱脚处的值可能不等而引起弹性中心的相对转角,从而引起弹性中心的弯矩。

轴向力对剪力和水平力的影响,两种理论得出的结果在性质上是相同的。即:正对称的轴向力不引起剪力;反对称的轴向力不引起水平力。

## 9.4 变位互等性

由 9.3 节及式(5-39)、(6-22) 知,剪力不引起弹性中心的相对水平位移( $t_4 = 0$ )和转角( $s_4 = 0$ ),同时,水平力和弯矩对弹性中心的相对竖向位移的贡献也为零( $u_2 = u_3 = 0$ )。下面将证明,在线性挠度理论中,单位水平力引起弹性中心的相对转角与单位弯矩引起的相对水平位移是相等的,即  $t_3 = s_2$ 。

$$9.4.1 \quad I_x = \frac{I_s \sec \varphi}{1 - (1 - n) \frac{|x|}{l}}$$

在式(5-39)中,系数  $s_2$  的表达式为

$$s_2 = -2a_2 \frac{d\phi(l)}{dx} - 2b_2 \frac{d\phi_2(l)}{dx} - 2l_2(l) \quad (9-25)$$

将  $a_2$ 、 $b_2$  和  $l_2(l)$  的表达式代入式(9-25)化简后有

$$\begin{aligned}
s_2 = & -K_1 \frac{2}{\det_2} \left[ \frac{d\phi_1(l)}{dx} \phi_2(l) - \frac{d\phi_2(l)}{dx} \phi_1(l) \right] \\
& \times \left[ -\frac{d\phi_2(0)}{dx} \int_0^l \phi_1(x) \left[ 1 - (1-n) \frac{x}{l} \right] (y - y_0) dx \right. \\
& \left. + \frac{d\phi_1(0)}{dx} \int_0^l \phi_2(x) \left[ 1 - (1-n) \frac{x}{l} \right] (y - y_0) dx \right]
\end{aligned} \quad (9-26)$$

从式(5-39)中再取出系数  $t_3$  有

$$t_3 = -2 \int_0^l [a_3 \phi_1(x) + b_3 \phi_2(x) + y_3(x)] y''(x) dx \\ + s_3(f - y_0)$$

将上式施行分步积分,并注意到:

$$y'(0) = 0; y(0) = 0; y(l) = f$$

$$a_3 \phi_1(l) + b_3 \phi_2(l) + y_3(l) = 0,$$

$$y'_3(x) = l_3(x) \quad \text{及}$$

$$s_3 = -2a_3 \frac{d\phi_1(l)}{dx} - 2b_3 \frac{d\phi_2(l)}{dx} - 2l_3(l)$$

$$\text{则有: } t_3 = -2 \int_0^l [a_3 \phi''_1(x) + b_3 \phi''_2(x)] y(x) dx \\ - 2 \int_0^l y''_3(x) y(x) dx - s_3 y_0 \quad (9-27)$$

$$- 2 \int_0^l [a_3 \phi''_1(x) + b_3 \phi''_2(x)] y(x) dx \\ = -2y_3(l) \left[ -\frac{d\phi_2(0)}{dx} \int_0^l \phi''_1(x) y(x) dx + \frac{d\phi_1(0)}{dx} \right. \\ \left. \times \int_0^l \phi''_2(x) y(x) dx \right] / \det_2 \\ = -\frac{2}{\det_2} K_1 \left[ \phi_2(l) \int_0^l \phi_1(x) \left[ 1 - (1-n) \frac{x}{l} \right] dx \right. \\ \left. - \phi_1(l) \int_0^l \phi_2(x) \left[ 1 - (1-n) \frac{x}{l} \right] dx \right] \left[ -\frac{d\phi_2(0)}{dx} \right. \\ \left. \times \int_0^l \phi''_1(x) y(x) dx + \frac{d\phi_1(0)}{dx} \int_0^l \phi''_2(x) y(x) dx \right] \quad (9-28)$$

$\phi_1, \phi_2$  是下列方程的两个根,故应满足下列关系:

$$\frac{d^2 \phi_{1,2}}{dx^2} + \beta^2 \left[ 1 - (1-n) \frac{x}{l} \right] \phi_{1,2} = 0 \quad (9-29)$$

将式(9-29)代入式(9-28)中,积分后有

$$\text{左边} = -\frac{2K_1}{\det_2} \left[ \phi_2(l) \frac{d\phi_1(l)}{dx} - \phi_1(l) \frac{d\phi_2(l)}{dx} \right] - \frac{d\phi_2(0)}{dx} \\ \int_0^l \phi_1(x) \left[ 1 - (1-n) \frac{x}{l} \right] y(x) dx \\ + \frac{d\phi_1(0)}{dx} \int_0^l \phi_2(x) \left[ 1 - (1-n) \frac{x}{l} \right] y(x) dx \quad (9-30)$$

$$\begin{aligned}
& - 2 \int_0^l y''_3(x) y(x) dx \\
& = 2K_1 \left[ - \frac{d\phi_1(0)}{dx} \int_0^l \phi_2(x) \left[ 1 - (1-n) \frac{x}{l} \right] y(x) dx \right. \\
& \quad \left. + \frac{d\phi_2(0)}{dx} \int_0^l \phi_1(x) \left[ 1 - (1-n) \frac{x}{l} \right] y(x) dx \right] \quad (9-31)
\end{aligned}$$

将式(9-30)、(9-31)及 $s_3$ 的表达式代入式(9-28)中,化简整理:

$$\begin{aligned}
t_3 = & - \frac{2K_1}{\det_2} \left[ \phi_2(l) \frac{d\phi_1(l)}{dx} - \phi_1(l) \frac{d\phi_2(l)}{dx} \right] \left[ - \frac{d\phi_2(0)}{dx} \right. \\
& \int_0^l \phi_1(x) \left[ 1 - (1-n) \frac{x}{l} \right] (y - y_0) dx + \frac{d\phi_1(0)}{dx} \\
& \left. \int_0^l \phi_2(x) \left[ 1 - (1-n) \frac{x}{l} \right] (y - y_0) dx \right] \quad (9-32)
\end{aligned}$$

比较式(9-26)与式(9-32)知 $t_3 = s_2$ 。

#### 9.4.2 $I_s = I_a \sec \varphi$

从式(6-21)中取出系数 $t_3$ 有

$$t_3 = - K_2 \frac{1}{\beta} \int_{-1}^1 \left( \frac{\cos(\beta x)}{\cos(\beta l)} - 1 \right) y''(x) dx + s_3(f - y_0) \quad (9-33)$$

对式(9-33)施行分部积分,得到

$$\begin{aligned}
t_3 = & - 2K_2 f \operatorname{tg}(\beta l) + K_2 \beta \int_{-1}^1 \frac{\cos(\beta x)}{\cos(\beta l)} y(x) dx \\
& + s_3(f - y_0) \quad (9-34)
\end{aligned}$$

将 $s_3 = 2K_2 \operatorname{tg}(\beta l)$ 代入式(9-34),有

$$\begin{aligned}
t_3 = & - 2K_2 + \operatorname{tg}(\beta l) + K_2 \beta \int_{-1}^1 \frac{\cos(\beta x)}{\cos(\beta l)} y(x) dx \\
& + 2K_2 + \operatorname{tg}(\beta l)(f - y_0) \\
= & K_2 \beta \int_{-1}^1 \frac{\cos(\beta x)}{\cos(\beta l)} (y - y_0) dx \quad (9-35)
\end{aligned}$$

将式(9-35)与式(6-21)中 $s_2$ 的表达式比较有

$$t_3 = s_2 \quad (9-36)$$

## 9.5 挠度理论的弹性中心

在 9.1 中, 已经给出了弹性理论的弹性中心  $y_0$  的位置, 它是一个仅与拱的几何特性有关的常数。从上节的推导知, 这个弹性中心, 已经不能使挠度理论中的求解未知力方程组的副变位为零。但线性挠度理论中, 同样存在变位互等定理, 即  $t_3 = s_2$ , 若令  $t_3 = s_2 = 0$ , 从中可导出挠度理论的弹性中心。

对于  $I_x = \frac{I_s \sec \varphi}{1 - (1 - n) \frac{|x|}{l}}$  的情况, 在式(9-26) 中, 令  $s_2 = 0$

有

$$-\frac{d\phi_2(0)}{dx} \int_0^l \phi_1(x) \left[ 1 - (1 - n) \frac{x}{l} \right] (y - y_0) dx \\ + \frac{d\phi_1(0)}{dx} \int_0^l \phi_2(x) \left[ 1 - (1 - n) \frac{x}{l} \right] (y - y_0) dx = 0$$

解得

$$y_0 = \left\{ \frac{d\phi_2(0)}{dx} \int_0^l \phi_1(x) \left[ 1 - (1 - n) \frac{x}{l} \right] y(x) dx - \frac{d\phi_1(0)}{dx} \right. \\ \times \left. \int_0^l \phi_2(x) \left[ 1 - (1 - n) \frac{x}{l} \right] y(x) dx \right\} / \left\{ \frac{d\phi_2(0)}{dx} \int_0^l \phi_1(x) \right. \\ \times \left[ 1 - (1 - n) \frac{x}{l} \right] dx - \frac{d\phi_1(0)}{dx} \int_0^l \phi_2(x) \left[ 1 - (1 - n) \right. \\ \times \left. \left. \frac{x}{l} \right] dx \right\} \quad (9-37)$$

对于  $I_x = I_s \sec \varphi$  的情况, 在式(6-21) 中, 令  $s_2 = 0$ , 得到

$$K_2 \beta \frac{1}{\cos(\beta l)} \int_{-l}^l (y - y_0) \cos(\beta x) dx = 0$$

解得

$$y_0 = \frac{\beta \int_{-l}^l \cos(\beta x) y(x) dx}{2 \sin(\beta l)} \quad (9-38)$$



从式(9-37)和式(9-38)可以看出:在挠度理论中,弹性中心位置与 $\beta(\beta_g)$ 有关。对于线性挠度理论,由于 $\beta(\beta_g)$ 是常数,故 $y_0$ 也是一定值。对于非线性挠度理论,由于 $\beta(\beta_g)$ 并不是常数,故 $y_0$ 与荷载及其作用位置有关,若采用这个弹性中心反而显得麻烦,尤其是用叠代法求解非线性挠度理论解时,这个问题更为突出。为了统一起见,在挠度理论中仍将采用弹性理论的弹性中心,这样不但计算简单,也便于两种理论结果进行比较。

## 第十章 数值分析

### 10.1 恒载在与拱同跨简支曲梁上产生的弯矩

#### 10.1.1 实腹式拱

实腹式拱由恒载引起的弯矩可分为：拱腹填料产生的弯矩  $\bar{M}_{g1}(x)$ ，桥面铺装(含人行道)产生的弯矩  $\bar{M}_{g2}(x)$  和拱圈产生的弯矩  $\bar{M}_{g3}(x)$ ，分别计算如下：

如图 10-1 所示，设拱顶填料厚为  $t_0$ ，填料容重为  $p$ ，则拱圈  $x$  点填料荷载强度为

$$q(x) = t_0 p + y p \quad (10-1)$$

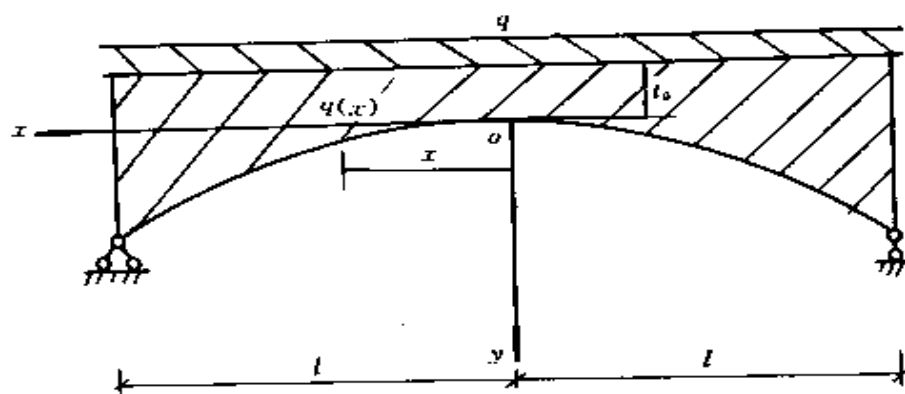


图 10-1 实腹式拱

由  $q(x)$  引起的支座反力  $F$  为(单位宽度上)

$$\begin{aligned} F &= \int_0^l q(x) dx \\ &= \int_0^l (t_0 p + y p) dx \end{aligned} \quad (10-2)$$

由填料产生的弯矩  $\bar{M}_{g1}(x)$  为

$$\begin{aligned}\bar{M}_{g1}(x) &= F(l-x) - \int_x^l q(\zeta)(\zeta-x)d\zeta \\ &= F(l-x) - \int_x^l [t_0 p + y(\zeta)p](\zeta-x)d\zeta\end{aligned}\quad (10-3)$$

设  $q$  表示单位铺装密度(人行道亦折算在  $q$  中), 则由桥面铺装产生的弯矩  $\bar{M}_{g2}(x)$  为

$$\begin{aligned}\bar{M}_{g2}(x) &= ql(l-x) - q(l-x) \frac{(l-x)}{2} \\ &= \frac{q}{2}(l^2 - x^2)\end{aligned}\quad (10-4)$$

设  $\gamma$  为拱圈材料容重,  $A(\zeta)$  为拱圈面积, 则由拱圈自重产生的弯矩  $\bar{M}_{g3}(x)$  为

$$\begin{aligned}\bar{M}_{g3}(x) &= (l-x) \int_0^l A(x) r \frac{dx}{\cos \varphi} \\ &\quad - \int_x^l A(\zeta) \frac{r}{\cos \varphi} (\zeta-x) d\zeta\end{aligned}\quad (10-5)$$

恒载产生的总弯矩  $\bar{M}_g(x)$  为

$$\bar{M}_g(x) = \bar{M}_{g1}(x) + \bar{M}_{g2}(x) + \bar{M}_{g3}(x)\quad (10-6)$$

### 10.1.2 空腹式拱

对于空腹式拱, 拱圈自重产生的弯矩同式(10-5), 由拱上建筑产生的弯矩相当于多个集中力作用在与拱同跨简支梁上产生的弯矩, 如图 10-2 所示。

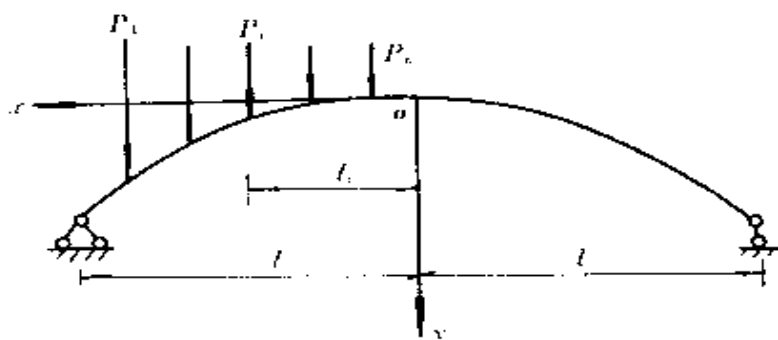


图 10-2 空腹式拱

设  $P_i$  表示任一立柱(墙, 板等) 所分到的力(包括立柱自重及桥面系立传给立柱的力), 则

$$F = \sum_{i=1}^n p_i \quad (10-7)$$

$$\bar{M}_{g1}(x) = F(l-x) - \sum_{i=0}^j p_i(l_i-x) \quad (10-8)$$

$$l_{j+1} \leq x \leq l_j$$

$$l_0 = l$$

$$p_0 = 0$$

若记实腹段填料在拱圈上产生的弯矩为  $\bar{M}_{g2}(x)$ ,  $\bar{M}_{g2}(x)$  见 1.4 节叙述。

总弯矩值同式(10-6)

## 10.2 任意变截面的处理

前面给出了等截面拱、变截面拱的挠度理论分析方法,在所推导的公式中,拱圈截面面积  $A_x$  的变化规律还是未知的,为了求得其解答,必须给出  $A_x$  的变化规律。以下对不同的截面形式分别研究。

### 10.2.1 矩形截面

这时,截面惯矩  $I_x = \frac{bh_x^3}{12}$ ,若  $I_x$  按照  $I_x = \frac{I_d \sec \phi}{1 - (1-n) \frac{|x|}{l}}$  变

化,则相应于  $A_x = bh_x$  的表达式为

$$A_x = A_d \sqrt[3]{\sec \phi / [1 - (1-n) \frac{|x|}{l}]} \quad (10-9)$$

式中:  $A_d$ ——拱顶截面面积;

$d$ ——拱截面宽度;

$h_x$ ——拱截面厚度。

### 10.2.2 变高度的 I 字形、箱形截面

如图 10-3 所示,设拱顶截面的惯性矩  $I_d$  和截面面积  $A_d$  分别为

$$\left. \begin{aligned} I_d &= I_{1d} - I_{2d} \\ A_d &= A_{1d} - A_{2d} \end{aligned} \right\} \quad (10-10)$$

式中:  $I_{1d}$ 、 $A_{1d}$  ——截面外形矩形截面对中性轴惯矩及截面外形矩形面积;

$I_{2d}$ 、 $A_{2d}$  ——图中阴影部分截面对中性轴惯矩及面积。



图 10-3 拱截面  
a) 工字形; b) 箱形

任一截面惯性矩为

$$I_x = \frac{I_{1d} - I_{2d}}{1 - (1 - n) \frac{|x|}{l}} \sec \varphi \quad (10-11)$$

其面积为

$$A_x = (A_{1d} - A_{2d}) \sqrt[3]{\sec \varphi / [1 - (1 - n) \frac{|x|}{l}]} \quad (10-12)$$

### 10.2.3 任意变截面

由前面的推导可知,  $A$  只包含在  $\bar{t}_5$ 、 $\bar{s}_5$  之中, 而  $\bar{t}_5$ 、 $\bar{s}_5$ , 对内力的影响较小, 故可以将  $A$  作如下近似处理。

在半拱上给定  $n + 1$  个点:

$$x_0 < x_1 < x_2 \cdots \cdots < x_n$$

和相应的截面面积:  $A_0, A_1, A_2 \cdots \cdots A_n$

建立如下线性插值函数:

$$f_0(x) = \begin{cases} \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} & x_0 \leq x \leq x_1 \\ 0 & x_1 < x \leq x_n \end{cases}$$

$$f_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} & x_i < x \leq x_{i+1} \\ 0 & [x_0, x_n] - [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases}$$

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} & x_{n-1} \leq x \leq x_n \\ 0 & x_0 \leq x < x_{n-1} \end{cases}$$

拱圈任意点截面面积按下式求得：

$$A = \sum_{i=1}^n A_i(x) f_i(x) \quad (10-13)$$

### 10.3 数值计算格式

对于等截面拱的求解，主要是处理函数的积分。对于变截面拱的求解，除处理函数积分外，还需处理 *Bessel* 函数，并用数值法求解非线性方程组。建议函数的数值积分采用高斯——勒让德积分公式积分，*Bessel* 函数用其积分表达式，非线性方程的求解可建立如下叠代格式进行求解。

#### 10.3.1 恒载阶段

将未知力  $H_g, M_g$  表示为

$$\left. \begin{aligned} H_g &= (s_1 t_3 - t_1 s_3) / (t_2 s_3 - s_2 t_3) \\ M_g &= (s_2 t_1 - t_2 s_1) / (t_2 s_3 - s_2 t_3) \end{aligned} \right\} \quad (10-14)$$

上式中实际上只有求  $H_g$  是非线性方程，可用迭代法求出  $H_g$ ，则  $M_g$  立即可求出。

建立如下迭代格式：

$H_g(0) = H_g^1$  ( $H_g^1$  可以是以弹性理论计算值，也可以是某一定值，但应大于零)

$$H_g(n+1) = (s_1 t_3 - t_1 s_3) / (t_2 s_3 - s_2 t_3) | H_g = H_g(n) \quad (10-15)$$

在式(10-15)中，若取  $H_g^1$  为弹性理论计算值，则  $H_g(1)$  实际上就是线性挠度理论的结果。

#### 10.3.2 外载阶段

可以将弹性中心的三个未知力表示成：

$$\left. \begin{aligned} H_x &= (s_1 t_3 - t_1 s_3) / [(t_2 + t_5) s_3 - (s_2 + s_5) t_3] \\ M_x &= [-s_1(t_2 + t_5) + t_1(s_2 + s_5)] / [(t_2 + t_5) s_3 - (s_2 + s_5) t_3] \\ Q_x &= -u_1 / u_4 \end{aligned} \right\} \quad (10-16)$$

在式(10-16)中,只有求 $H_x$ 是非线性方程,故只要求得 $H_x$ ,则 $M_x$ 、 $Q_x$ 即可求得。用迭代法求解 $H_x$ ,可建立如下迭代格式:

$$\left. \begin{aligned} H_x(0) &= 0 \\ H_x(n+1) &= [s_1 t_3 - t_1 s_3] / [(t_2 + t_5) s_3 - (s_2 + s_5) t_3] | H_x = H_x(n) \end{aligned} \right\} \quad (10-17)$$

可见, $H_x(1)$ 就是线性挠度理论的结果。

附录IV给出 $I_x = \frac{I_d \sec \varphi}{[1 - (1-n) \frac{|x|}{l}]}$ 时的挠度理论分析程序。

附录V给出 $I_x = I_d \sec \varphi$ 时的线性挠度理论分析程序。

## 10.4 参数对内力的影响

为对比分析各参数变化引起拱内力变化幅度(指用弹性理论和挠度理论计算值的误差),以下以不同类型的桥梁上作用单位集中荷载,在控制截面产生的内力相对误差来分析各参数对拱内力的影响。

$$\text{误差} = \frac{\text{挠度理论值} - \text{弹性理论值}}{|\text{弹性理论值}|} \times 100\%$$

### 10.4.1 等截面悬链线拱<sup>[2]</sup>

表10-1~表10-6分别为弹性模量 $E$ 、拱圈抗弯惯矩 $I$ 、拱脚恒载推力 $H_g$ 、拱跨径 $l$ 、矢高 $f$ 及拱轴系数 $m$ 的变化引起拱圈截面中的弯矩变化规律。

### 10.4.2 变截面悬链线拱<sup>[3]</sup>

表10-7~表10-11分别为参数 $\beta = \frac{H_g}{EI_a}$ 、跨径 $l$ 、矢高 $f$ 、变截面系数 $n$ 及拱轴系数 $m$ 的变化引起拱圈截面中的弯矩变化规律。

### 10.4.3 变截面圆弧拱<sup>[1]</sup>

表 10-12 ~ 表 10-16 分别为弹性模量  $E$ 、跨径  $l$ 、矢高  $f$ 、跨径  $l$  矢高  $f$  及变截面系数  $n$  变化时引起拱圈截面中的弯矩变化规律。桥梁其它参数选用表 10-17 中相应参数。

## 10.5 线性挠度理论影响线

本节给出表 10-17 所示的各拱桥线性挠度理论计算的内力影响线坐标,为对比,同时给出了弹性理论影响线坐标。在表 10-18 ~ 表 10-22 中:

$X$  ——为横坐标(m);

$M_x, H_x, Q_x$  ——分别为弹性中心弯矩、水平力和竖向力;

$M_d, M_{\frac{l}{4}}, M_j$  ——分别为拱顶、 $\frac{1}{4}$  跨、拱脚截面弯矩;

$N_1, N_{\frac{l}{4}}, N_{\frac{l}{2}}$  ——分别为拱脚、 $\frac{1}{4}$  跨左、右截面的轴力。

弹性模量  $E$  变化

表 10-1

变参数 数 $E(\text{MPa})$	内 力 计 算 理 论	$l = 100\text{m}, f = 20\text{m}, m = 3.5,$ $I = 2.53125\text{m}^4, H_g = 4 \times 10^4\text{kN}$					
		最大正弯矩(kN·m)			最小负弯矩(kN·m)		
		拱 顶	拱跨 $\frac{l}{4}$	拱 脚	拱 顶	拱跨 $\frac{l}{4}$	拱 脚
$7.2 \times 10^3$	弹性理论	5.6244	5.8747	5.4879	-1.0911	-3.0381	-5.7729
	挠度理论	6.6383	7.3827	6.7463	-1.4200	-4.2890	-6.6732
	误 差	18.44	25.67	22.93	30.15	-41.17	-15.60
$1.9 \times 10^4$	弹性理论	5.6244	5.8747	5.4879	-1.0911	-3.0381	-5.7729
	挠度理论	5.9530	6.3465	5.9648	-1.1964	-3.4281	-6.1140
	误 差	6.21	8.03	8.69	-9.65	-12.83	-5.91
$2.7 \times 10^4$	弹性理论	5.6244	5.8747	5.4879	-1.0911	-3.0381	-5.7729
	挠度理论	5.8486	6.1941	5.8235	-1.1628	-3.3019	-6.0130
	误 差	4.35	5.44	6.11	-6.57	-8.68	-4.46



拱圈抗弯惯矩  $I$  变化

表 10-2

变 参 数 $I(\text{m}^4)$	参 数 内 力 计 算 理 论	$l = 100\text{m}, f = 20\text{m}, m = 3.5,$ $E = 1.9 \times 10^4 \text{MPa}, H_g = 4 \times 10^4 \text{kN}$					
		最大正弯矩(kN·m)			最小负弯矩(kN·m)		
		拱 顶	拱跨 $\frac{l}{4}$	拱 脚	拱 顶	拱跨 $\frac{l}{4}$	拱 脚
2.05031	弹性理论	5.6169	5.8729	5.5012	-1.0947	-3.0407	-5.7685
	挠度理论	6.0313	6.4733	6.0890	-1.2283	-3.5369	-6.1903
	误 差	7.38	10.22	10.68	-12.21	-16.32	-7.31
2.53125	弹性理论	5.6244	5.8747	5.4879	-1.0911	-3.0381	-5.7729
	挠度理论	5.9530	6.3465	5.9648	-1.1964	-3.4281	-6.1140
	误 差	6.21	8.03	8.69	-9.65	-12.83	-5.91
3.02033	弹性理论	5.6321	5.8764	5.4745	-1.0875	-3.0354	-5.7486
	挠度理论	5.9035	6.2635	5.8748	-1.1739	-3.3555	-5.9981
	误 差	4.82	6.59	7.31	-7.95	-10.54	-1.34

拱脚恒载推力  $H_g$  变化

表 10-3

变 参 数 $H_g(\text{kN})$	参 数 内 力 计 算 理 论	$l = 100\text{m}, f = 20\text{m}, m = 3.5,$ $I = 2.53125\text{m}^4, E = 1.9 \times 10^4 \text{MPa}$					
		最大正弯矩(kN·m)			最小负弯矩(kN·m)		
		拱 顶	拱跨 $\frac{l}{4}$	拱 脚	拱 顶	拱跨 $\frac{l}{4}$	拱 脚
$3 \times 10^4$	弹性理论	5.6244	5.8747	5.4879	-1.0911	-3.0381	-5.7729
	挠度理论	5.8645	6.2172	5.8456	-1.1679	-3.3210	-6.0288
	误 差	4.27	5.83	6.52	-7.04	-9.31	-4.43
$4 \times 10^4$	弹性理论	5.6244	5.8747	5.4879	-1.0911	-3.0381	-5.7729
	挠度理论	5.9530	6.3465	5.9648	-1.1964	-3.4281	-6.1140
	误 差	6.21	8.03	8.69	-9.65	-12.83	-5.91
$5 \times 10^4$	弹性理论	5.6244	5.8747	5.4879	-1.0911	-3.0381	-5.7729
	挠度理论	6.0475	6.4835	6.0840	-1.2264	-3.5416	-6.1176
	误 差	7.49	10.36	10.86	-12.04	-12.57	-5.97

跨 径  $l$  变 化

表 10-4

变 参 数 $l(\text{m})$	参 数 内 力 计 算 理 论	$E = 1.9 \times 10^4 \text{MPa}, f = 20\text{m}, m = 3.5,$ $I = 2.53125\text{m}^4, H_g = 4 \times 10^4 \text{kN}$					
		最大正弯矩(kN·m)			最小负弯矩(kN·m)		
		拱 顶	拱跨 $\frac{l}{4}$	拱 脚	拱 顶	拱跨 $\frac{l}{4}$	拱 脚
80	弹性理论	4.5595	4.7503	4.2486	-0.8927	-2.4532	-4.5000
	挠度理论	4.7294	4.9962	4.4955	-0.9473	-2.6548	-4.6810
	误 差	3.73	5.18	5.81	6.11	-8.22	-4.02
100	弹性理论	5.6244	5.8747	5.4879	-1.0911	-3.0381	-5.7729
	挠度理论	5.9530	6.3465	5.9648	-1.1964	-3.4281	-6.1140
	误 差	6.21	8.03	8.69	-9.65	-12.83	-5.91
120	弹性理论	6.8020	6.9960	6.7339	-1.2911	-3.6187	-7.0528
	挠度理论	7.3920	7.8207	7.5535	-1.4758	-4.3040	-7.6301
	误 差	8.67	11.79	12.17	-14.31	-18.94	-8.19

矢 高  $f$  变 化

表 10-5

变 参 数 $f(\text{m})$	参 数 内 力 计 算 理 论	$l = 100\text{m}, E = 1.9 \times 10^4 \text{MPa}, m = 3.5,$ $I = 2.53125\text{m}^4, H_g = 4 \times 10^4 \text{kN}$					
		最大正弯矩(kN·m)			最小负弯矩(kN·m)		
		拱 顶	拱跨 $\frac{l}{4}$	拱 脚	拱 顶	拱跨 $\frac{l}{4}$	拱 脚
12.5	弹性理论	5.5887	5.7880	5.6475	-1.0308	-2.9660	-6.0439
	挠度理论	5.9038	6.2168	6.1257	-1.1275	-3.3264	-6.3672
	误 差	5.64	7.41	8.47	-9.38	-12.15	-5.35
20	弹性理论	5.6244	5.8747	5.4879	-1.0911	-3.3081	-5.7729
	挠度理论	5.9530	6.3465	5.9648	-1.1964	-3.4281	-6.1140
	误 差	6.21	8.03	8.69	-9.65	-12.83	-5.91
50	弹性理论	6.0694	6.1244	4.7256	-1.2709	-3.1061	-5.1089
	挠度理论	6.5121	6.8208	5.2596	-1.4196	-3.6462	-5.5454
	误 差	7.29	11.37	11.30	-11.70	-17.56	-8.54

拱轴系数  $m$  变化

表 10-6

变 参 数 $m$	内 计 算 理 论	参 数 $l = 100\text{m}, f = 20\text{m}, E = 1.9 \times 10^4 \text{MPa},$ $I = 2.53125\text{m}^4, H_g = 4 \times 10^4 \text{kN}$					
		最大正弯矩 (kN · m)			最小负弯矩 (kN · m)		
		拱 顶	拱跨 $\frac{l}{4}$	拱 脚	拱 顶	拱跨 $\frac{l}{4}$	拱 脚
2.814	弹性理论	5.4651	5.9051	5.3182	1.1370	- 2.9670	- 5.9213
	挠度理论	5.7725	6.3786	5.7847	- 1.2447	- 3.3472	- 6.2640
	误 差	5.63	8.02	8.77	- 9.47	- 12.93	5.79
3.500	弹性理论	5.6244	5.8747	5.4879	- 1.0911	- 3.0381	- 5.7729
	挠度理论	5.9530	6.3465	5.9648	- 1.1964	- 3.4281	- 6.1140
	误 差	6.21	8.03	8.69	9.65	- 12.83	- 5.91
5.321	弹性理论	5.9187	5.8171	5.8179	- 0.9903	- 3.1749	- 5.4823
	挠度理论	6.2927	6.2855	6.3174	- 1.0895	- 3.5894	- 5.7791
	误 差	6.32	8.05	8.59	- 10.02	- 12.81	- 5.41

分数  $\beta = \frac{H_g}{EI_d}$  变化

表 10-7

变 参 数 $\beta$	内 计 算 理 论	参 数 $l = 120\text{m}, f = 20\text{m}, m = 3.5, n = 0.6$					
		最大正弯矩 (kN · m)			最小负弯矩 (kN · m)		
		拱 顶	拱跨 $\frac{l}{4}$	拱 脚	拱 顶	拱跨 $\frac{l}{4}$	拱 脚
0.02	弹性理论	6.118	6.607	8.014	- 1.091	- 3.468	- 8.041
	挠度理论	6.299	6.843	8.415	- 1.130	- 3.667	- 8.283
	误 差	2.96	3.572	5.00	- 3.57	- 5.73	- 3.07
0.03	弹性理论	6.118	6.607	8.014	- 1.091	- 3.468	- 8.041
	挠度理论	6.542	7.152	8.868	- 1.203	- 3.951	- 8.638
	误 差	6.93	8.25	10.66	- 10.27	- 13.93	- 7.42
0.04	弹性理论	6.118	6.607	8.014	- 1.091	- 3.468	- 8.041
	挠度理论	6.929	7.665	9.628	- 1.321	- 4.426	- 9.211
	误 差	13.26	16.01	20.14	- 21.08	- 27.62	- 14.55

跨 径  $l$  变 化

表 10-8

变 参 数 $l(m)$	内 力 计 算 理 论	参 数 $f = 20m, m = 4.324, n = 0.6, \beta = 0.03$					
		最大正弯矩(kN·m)			最小负弯矩(kN·m)		
		拱 顶	拱跨 $\frac{l}{4}$	拱 脚	拱 顶	拱跨 $\frac{l}{4}$	拱 脚
100	弹性理论	5.239	5.457	6.911	-0.869	-2.969	6.554
	挠度理论	5.492	5.760	7.457	-0.929	3.246	-6.892
	误 差	4.83	3.48	7.43	-6.90	9.33	-5.16
120	弹性理论	6.281	6.547	8.316	-1.045	-3.564	-7.860
	挠度理论	6.735	7.085	9.216	1.156	-4.063	8.467
	误 差	7.23	8.22	10.43	10.62	-14.00	7.72
140	弹性理论	7.333	7.639	9.724	-1.218	-4.156	-9.174
	挠度理论	8.071	8.525	11.153	-1.409	-4.992	-10.171
	误 差	10.06	11.59	14.70	15.68	20.11	-10.87

矢 高  $f$  变 化

表 10-9

变 参 数 $f(m)$	内 力 计 算 理 论	参 数 $l = 140m, m = 2.814, n = 0.6, \beta = 0.03$					
		最大正弯矩(kN·m)			最小负弯矩(kN·m)		
		拱 顶	拱跨 $\frac{l}{4}$	拱 脚	拱 顶	拱跨 $\frac{l}{4}$	拱 脚
14.0	弹性理论	7.009	7.785	8.830	1.302	-3.922	-9.630
	挠度理论	7.681	8.690	10.178	-1.487	-4.708	-10.613
	误 差	9.59	11.62	15.27	-14.21	17.94	-10.21
17.5	弹性理论	6.962	7.778	8.944	-1.321	-3.933	-9.592
	挠度理论	7.626	8.687	10.282	-1.509	-4.713	-10.530
	误 差	9.54	11.69	11.96	-14.23	-19.83	10.30
23.33	弹性理论	6.924	7.776	9.035	1.337	-3.938	-9.567
	挠度理论	7.583	8.685	10.363	1.526	-4.716	-10.554
	误 差	9.52	11.69	14.70	14.13	-19.76	-10.39

变截面分数  $n$  变化

表 10-10

变 参 数 $n$	内 力 计 算 理 论	参 数 $l = 140\text{m}, f = 20\text{m}, m = 2.814, \beta = 0.03$					
		最大正弯矩(kN·m)			最小负弯矩(kN·m)		
		拱 顶	拱跨 $\frac{l}{4}$	拱 脚	拱 顶	拱跨 $\frac{l}{4}$	拱 脚
0.3	弹性理论	6.478	7.310	10.438	-1.204	-3.735	-10.812
	挠度理论	6.982	7.902	11.617	-1.314	-4.261	-11.592
	误 差	7.73	8.10	11.29	-9.14	-14.08	-7.21
0.6	弹性理论	6.941	7.778	8.993	-1.330	-3.935	-9.575
	挠度理论	7.603	8.686	10.325	-1.518	-4.714	-10.566
	误 差	8.54	11.67	14.81	-14.13	-19.80	-13.35
0.8	弹性理论	7.190	7.947	8.474	-1.415	-3.970	-9.120
	挠度理论	7.943	9.048	9.914	-1.650	-4.922	-10.253
	误 差	10.47	13.85	16.99	-16.61	-23.98	-12.49

拱轴系数  $m$  变化

表 10-11

变 参 数 $m$	内 力 计 算 理 论	参 数 $l = 140\text{m}, f = 20\text{m}, n = 0.6, \beta = 0.03$					
		最大正弯矩(kN·m)			最小负弯矩(kN·m)		
		拱 顶	拱跨 $\frac{l}{4}$	拱 脚	拱 顶	拱跨 $\frac{l}{4}$	拱 脚
1.756	弹性理论	6.580	7.917	8.270	-1.446	-3.720	-9.937
	挠度理论	7.168	8.843	9.525	-1.635	-4.439	-10.938
	误 差	8.94	11.70	15.18	-13.07	-19.33	-10.07
4.324	弹性理论	7.333	7.639	9.724	-1.218	-4.156	-9.174
	挠度理论	8.071	8.525	11.153	-1.409	-4.992	-10.171
	误 差	10.06	11.59	14.70	-15.68	-20.11	-10.87
6.536	弹性理论	7.738	7.487	10.452	-1.105	-4.378	-8.791
	挠度理论	8.576	8.36	12.013	-1.284	-5.270	-9.750
	误 差	10.83	11.66	14.935	-16.20	-20.37	-10.91

弹性模量  $E$  变化

表 10-12

变参数 数 $E(\text{MPa})$	参 数 内 力 计 算 理 论	$l = 100\text{m}, f = 20\text{m}, m = 3.5, n = 0.6$					
		最大正弯矩( $\text{kN} \cdot \text{m}$ )			最小负弯矩( $\text{kN} \cdot \text{m}$ )		
		拱 顶	拱跨 $\frac{l}{4}$	拱 脚	拱 顶	拱跨 $\frac{l}{4}$	拱 脚
$1.85 \times 10^4$	弹性理论	5.5804	6.7872	7.1233	-1.2808	-3.1671	-8.4720
	挠度理论	6.4828	8.1260	8.6910	-1.5318	-4.2542	-9.7895
	误 差	15.1	19.73	22.01	-19.50	-34.32	-15.55
$2.6 \times 10^4$	弹性理论	5.5804	6.7872	7.1233	-1.2808	-3.1671	-8.4720
	挠度理论	6.1589	7.6704	8.1094	-1.4363	-3.8720	-9.3510
	误 差	10.37	13.01	13.84	-12.14	-22.26	-10.38
$3.0 \times 10^4$	弹性理论	5.5804	6.7872	7.1233	-1.2808	-3.1671	-8.4720
	挠度理论	6.0784	7.5304	7.9388	-1.4073	-3.7603	-9.2201
	误 差	8.92	11.04	11.45	-9.88	-18.73	-8.83

跨径  $l$  变化

表 10-13

变参数 数 $l(\text{m})$	参 数 内 力 计 算 理 论	$f = 20\text{m}, n = 0.5, E = 2.6 \times 10^4 \text{MPa}$					
		最大正弯矩( $\text{kN} \cdot \text{m}$ )			最小负弯矩( $\text{kN} \cdot \text{m}$ )		
		拱 顶	拱跨 $\frac{l}{4}$	拱 脚	拱 顶	拱跨 $\frac{l}{4}$	拱 脚
100	弹性理论	4.6502	5.5395	6.4581	-1.0029	-2.6478	-7.1580
	挠度理论	4.8968	5.8592	6.7828	-1.0403	-2.9027	-7.4976
	误 差	5.30	5.77	5.03	-3.73	-9.63	-4.75
120	弹性理论	5.4696	6.6907	7.4309	-1.2425	-3.1067	-8.7169
	挠度理论	5.9387	7.3635	8.2074	-1.3581	-3.6459	-9.4187
	误 差	8.58	10.05	10.45	-9.30	-17.37	-8.05
140	弹性理论	6.3006	7.8384	8.4508	-1.4778	-3.5709	-10.2576
	挠度理论	7.11525	9.11619	10.0713	-1.7371	-4.6362	-11.6143
	误 差	13.52	16.88	19.18	-17.15	-29.83	-13.23

矢高  $f$  变化

表 10-14

变参数 $f(\text{m})$	内 力 计 算 理 论	参 数 $l = 100\text{m}, n = 0.5, E = 2.6 \times 10^4 \text{MPa}$					
		最大正弯矩(kN·m)			最小负弯矩(kN·m)		
		拱 顶	拱跨 $\frac{l}{4}$	拱 脚	拱 顶	拱跨 $\frac{l}{4}$	拱 脚
16.667	弹性理论	4.5580	5.5756	6.1924	-1.0354	-2.5889	-7.2641
	挠度理论	4.8099	5.8978	6.4766	-1.0685	-2.8370	-7.6114
	误 差	5.53	5.78	4.59	3.20	-9.58	-4.78
20.000	弹性理论	4.6502	5.5395	6.4581	-1.0029	-2.6478	-7.1580
	挠度理论	4.8968	5.8592	6.7828	-1.0403	-2.9027	-7.4977
	误 差	5.30	5.77	5.03	-3.73	-9.63	-4.75
25.000	弹性理论	4.8088	5.4809	6.9713	-0.9458	-2.7418	-6.9558
	挠度理论	5.0601	5.7967	7.3405	-0.9828	-3.0082	-7.2888
	误 差	5.23	5.76	5.30	-3.91	-9.72	-4.79

跨径  $l$  矢高  $f$  变化

表 10-15

变参数 $f, l(\text{m})$	内 力 计 算 理 论	参 数 $n = 0.5, E = 2.6 \times 10^4 \text{MPa}$					
		最大正弯矩(kN·m)			最小负弯矩(kN·m)		
		拱 顶	拱跨 $\frac{l}{4}$	拱 脚	拱 顶	拱跨 $\frac{l}{4}$	拱 脚
$f = 13.4$ $l = 100.0$	弹性理论	4.4808	5.6069	5.9840	-1.0624	-2.5374	-7.3478
	挠度理论	4.7511	5.9315	6.2058	-1.0848	-2.7793	-7.7087
	误 差	6.03	5.79	3.71	-2.11	-9.53	-4.91
$f = 20.0$ $l = 120.0$	弹性理论	5.4696	6.6907	7.4309	-1.2425	-3.1067	-8.7169
	挠度理论	5.9387	7.3635	8.2074	-1.3581	-3.459	-9.4187
	误 差	8.58	10.06	10.45	-9.30	-17.36	-8.05
$f = 28.0$ $l = 140.0$	弹性理论	6.5276	7.7486	9.0941	-1.3982	-3.7177	-10.0002
	挠度理论	7.4207	9.0569	10.8401	-1.6544	-4.8283	-11.3492
	误 差	13.68	16.88	19.20	-18.32	-29.87	-13.49

变截面系数  $n$  变化

表 10-16

变 参 数 $n$	内 力 计 算 理 论	参 数 $l = 120\text{m}, f = 20\text{m}, E = 2.6 \times 10^4 \text{MPa}$					
		最大正弯矩(kN·m)			最小负弯矩(kN·m)		
		拱 顶	拱跨 $\frac{l}{4}$	拱 脚	拱 顶	拱跨 $\frac{l}{4}$	拱 脚
0.3	弹性理论	5.2036	6.3877	8.3735	-1.1523	-2.8953	-9.4582
	挠度理论	5.6602	6.9602	9.1661	-1.2593	-3.3705	-10.1381
	误 差	8.77	8.96	9.47	-9.32	16.41	-7.19
0.5	弹性理论	5.4696	6.6907	7.4309	-1.2425	-3.1067	-8.7169
	挠度理论	6.0079	7.45734	8.3591	-1.3830	-3.7385	-9.5307
	误 差	9.84	11.70	12.49	-11.31	-20.34	-9.34
0.8	弹性理论	5.7734	6.9209	6.6741	-1.3466	-3.2413	-8.1145
	挠度理论	6.4322	8.0032	7.7742	-1.5328	-4.0880	-9.1242
	误 差	11.41	15.64	16.48	-13.83	-26.12	-12.44

拱桥参数(圆弧拱,  $n = 0.5$ )

表 10-17

跨径 (m)	矢高 (m)	腹孔 跨径 (m)	腹孔 孔数	实腹 段长 (m)	$E$ (MPa)	$I_d$ (m <sup>4</sup> )	$A_d$ (m <sup>2</sup> )	备 注
40	8	4	10	4	$2.6 \times 10^4$	0.144	4.8	(1) 桥面系: 净 7 + 2 × 1.5; (2) $\frac{f}{l} = \frac{1}{5}$ ; (3) 拱顶土填料厚 0.3 ~ 0.5m; (4) $l, f$ 为跨径、 矢高。
60	12	6	10	6		0.3413	6.4	
80	16	8	10	8		0.6667	8.0	
100	20	10	10	10		1.152	9.6	
120	24	12	10	12		1.829	11.2	

## 10.6 实桥内力分析

取表 10-17 所示拱桥, 将恒载内力的计算值及误差列入表 10-23 中。在汽车-20 级荷载作用下, 跨径 120m 的活载内力计算值及误差列入表 10-24 中, 其总内力及误差列入表 10-25 中。



表 10-18a)

弹性理论影响线坐标值

	29.00000	8.00000	20.00000	50.0000					
$X$	$M_x$	$H_x$	$Q_x$	$M_d$	$M_d$	$M_j$	$N_j$	$N_{d1}$	$N_{d2}$
-20.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000
-18.00000	-9.6491	.03893	.04402	-.04552	.03612	.14623	.03232	.03860	.03860
-16.00000	-1.85785	.14321	.07616	-.15440	.13803	.51457	.12014	.14265	.14265
-14.00000	-2.67021	.29418	.09686	-.27937	-.28751	1.01126	.24967	.29446	.29446
-12.00000	-3.39535	.47330	.10655	-.37541	-.46807	1.54196	.40718	.47649	.47649
-10.00000	-4.02796	.66315	.10626	-.40115	-.65903	2.02921	.57934	.67702	.67204
-8.00000	-4.55942	.84693	.09595	-.31318	-.83721	2.40135	.75333	.86500	.86500
-6.00000	-4.98573	1.00947	.08002	-.07605	-.98035	2.60003	.71719	1.04065	1.04065
-4.00000	-5.29671	1.13686	.05696	.34917	-1.05911	2.58324	1.05982	1.18542	1.18542
-2.00000	-5.49016	1.21968	.02959	.98424	-1.05048	2.33338	1.17315	1.28984	1.28984
.00000	-5.55516	1.24825	.00000	1.86007	-.91969	1.84606	1.24873	1.34410	1.34410
2.00000	-5.49016	1.21968	.02959	.98424	-.64222	1.14990	1.28293	1.34473	1.34473
4.00000	-5.29671	1.13686	.05696	.34917	-.19831	.30414	1.27932	1.29367	1.29367
6.00000	-4.98573	1.00947	.08002	-.07605	.41930	-.60067	1.23445	1.19928	1.19928
8.00000	-4.55942	.84693	.09695	-.31318	1.22370	-1.47684	1.16292	1.06980	1.06980
10.00000	-4.02796	.66315	.10126	-.40115	2.21579	-2.22114	1.07073	.91774	.57291
12.00000	-3.39535	.47330	.10655	-.37541	1.40093	-4.272004	.96794	.41204	.41204
14.00000	-2.67021	.29418	.09686	-.27937	.77526	-2.86319	.86603	.25781	.25781
16.00000	-1.85785	.14321	.07616	-.15440	.33868	-2.53200	.77692	.12621	.12621
18.00000	-.96491	.03893	-.04402	-.04552	.08356	-1.61442	.713372	.03448	.03448
20.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.68966	.00000	.00000

表 10-18b)

线性烧度理论影响线坐标值

$f=8.0000, R=29.0000, l/2=20.0000, n=0.5, Y_0=2.07000, H_y=461.810$									
$X$	$M_x$	$H_x$	$Q_x$	$M_d$	$M_k$	$M_j$	$N_j$	$N_{41}$	$N_{42}$
-20.0000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000
-18.0000	-.96463	.03880	.04404	-.04670	-.03775	.14622	.03221	.03480	.03480
-16.0000	-1.85635	.141250	.07650	-.15395	-.13996	.51131	.11849	.12775	.12775
-14.0000	-2.66952	.29059	.09768	-.27946	-.29170	1.00724	.24651	.26516	.26516
-12.0000	-3.39538	.46780	.10777	-.37300	-.47487	1.53409	.40236	.43160	.43160
-10.0000	-4.02587	.65526	.10742	-.38901	-.66857	2.00812	.57283	.61247	.61247
-8.0000	-4.56192	.84141	.09843	-.30559	-.85192	2.39630	.74831	.79742	.79742
-6.0000	-4.98904	1.00273	.08137	-.05813	-.99622	2.58448	.91138	.96713	.96713
-4.0000	-5.30117	1.12926	.05792	.37771	-1.07564	2.55370	1.05366	1.11258	1.11258
-2.0000	-5.49438	1.21099	.03013	1.02399	-1.06303	2.28942	1.16649	1.22450	1.22450
.00000	-5.56118	1.24194	.00000	1.89662	-.93003	1.80354	1.24416	1.29689	1.29689
2.00000	-5.49438	1.21098	-.03013	1.02400	-.64334	1.08410	1.27701	1.31939	1.31939
4.00000	-5.30117	1.12926	-.05792	.37772	-.19183	.23699	1.27148	1.29959	1.29959
6.00000	-4.98904	1.00272	-.08137	-.05812	.43359	.67024	1.23050	1.24110	1.24110
8.00000	-4.56192	.94141	-.09843	-.30559	1.24391	-1.54103	1.15994	1.15081	1.15081
10.00000	-4.02587	.65526	-.10742	-.39902	2.24522	-2.28852	1.06582	1.03572	1.03572
12.00000	-3.39538	.46780	-.10777	-.37300	1.42059	-2.77673	.96480	.32238	.32238
14.00000	-2.66952	.29059	-.09768	-.27946	.78901	-2.89987	.86400	.20320	.20320
16.00000	-1.85635	.14125	-.07650	-.15395	.34751	-2.54873	.77574	.09992	.09992
18.00000	-.96463	.03880	-.04404	-.04670	.08642	-1.61533	.71364	.02774	.02774
20.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.68996	.00000	.00000

表 10-19a)

弹性理论影响线坐标值

	43.50000	12.00000	30.00000	50000					
X	M <sub>x</sub>	H <sub>x</sub>	Q <sub>x</sub>	M <sub>d</sub>	M <sub>4</sub>	M <sub>3</sub>	N <sub>j</sub>	N <sub>41</sub>	N <sub>42</sub>
-30.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000
-27.00000	-1.44737	.03893	.04402	.06828	-.05417	.21935	.03232	.03860	.03860
-24.00000	-2.78678	.14321	.07616	.23160	-.20705	.77185	.12014	.14265	.14265
-21.00000	4.00532	.29418	.09686	-.41905	-.43126	1.51689	.24967	.29446	.29446
-18.00000	-5.09302	.47330	.10655	-.56312	-.70210	2.31293	.40718	.47649	.47649
-15.00000	-6.04194	.66315	.10626	-.60173	-.93855	3.04380	.57934	.67204	.67204
-12.00000	-6.83914	.84693	.09695	-.46976	-.25582	3.60201	.75332	.86500	.86500
-9.00000	-7.47859	.010947	.08002	-.11407	-1.47053	3.90004	.91719	1.04065	1.04065
-6.00000	-7.94507	1.13680	.05696	.52376	-1.58867	3.87485	1.05982	1.18542	1.18542
-3.00000	-8.23524	1.21967	.02959	1.47636	-1.57571	3.50006	1.17315	1.28984	1.28984
.00000	-8.33273	1.24825	.00000	2.79011	-1.37953	2.76909	1.24873	1.34410	1.34410
3.00000	-8.23524	1.21967	-.02959	1.47636	-.96333	1.72483	1.28293	1.34472	1.34472
6.00000	-7.94507	1.13686	-.05696	.52377	-.29747	.45725	1.27632	1.29367	1.29367
9.00000	7.47859	1.00947	-.08002	-.11407	.62895	-.90101	1.23445	1.19928	1.19928
12.00000	-6.83914	.84693	-.09695	-.46977	1.83554	-2.21526	1.16292	1.06980	1.06980
15.00000	-6.04194	.66315	-.01626	-.60173	3.32369	-3.33172	1.07073	.91774	.91774
18.00000	-5.09302	.47330	-.10655	-.56312	2.10140	-4.08007	.96794	.41204	.41204
21.00000	-4.00532	.29418	-.19686	-.41905	1.16290	-4.29479	.86603	.25781	.25781
24.00000	-2.78678	.14321	-.07616	-.23160	.50802	3.79800	.77692	.12621	.12621
27.00000	-1.44737	.03893	-.04402	-.06828	.12533	-2.42163	.71372	.03448	.03448
30.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.68966	.00000	.00000

表 10-19b)

线性挠度理论影响线坐标值

$F=12, R=43.5, l/2=30, n=.50, Y_0=3.10600, H_g=551.330$									
$X$	$M_x$	$H_x$	$Q_x$	$M_d$	$M_s$	$M_j$	$N_j$	$N_{d1}$	$N_{d2}$
-30.00000	.0000	.0000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000
-27.00000	-1.44643	.03852	.04417	-.07132	-.05733	.22120	.031191	.03449	.03449
-24.00000	-2.78311	.14053	.07694	-.25525	-.21297	.77489	.11767	.12691	.12691
-21.00000	-4.00213	.28966	.09849	-.42716	-.44451	1.52870	.24529	.26393	.26393
-18.00000	-5.09099	.46718	.10892	-.57023	-.72457	2.33168	.40112	.43042	.43042
-15.00000	-6.03773	.65554	.10879	-.59481	-1.02109	3.05623	.57209	.61189	.61189
-12.00000	-6.84261	.84283	.09987	-.46736	-1.30156	3.64965	.74835	.79771	.79771
-9.00000	-7.48509	1.00565	.08268	-.09051	-1.52204	3.93945	.91259	.98871	.98871
-6.00000	-7.95506	1.13356	.05891	-.57144	-1.64243	3.98424	1.05609	1.11546	1.11546
-3.00000	-8.24615	1.23631	.03067	1.54891	-1.62107	3.49179	1.16997	1.22947	1.22947
.00000	-8.34648	1.24753	.00000	2.86197	-1.41477	2.74901	1.24821	1.30139	1.30139
3.00000	-8.24615	1.21631	-.03067	1.54891	-.97436	1.65156	1.28124	1.32400	1.32400
6.00000	-7.95506	1.13357	-.05891	.57143	-.28376	.35951	1.27528	1.30365	1.30365
9.00000	-7.48509	1.00564	-.08268	-.09049	.66837	-1.02118	1.23352	1.24423	1.24423
12.00000	-6.84261	.84284	-.09987	-.46736	1.89473	-2.34252	1.16196	1.15281	1.15281
15.00000	-6.03773	.65554	-.10879	-.59481	3.40047	-3.47092	1.06697	1.03676	1.03676
18.00000	-5.09099	.46719	-.10892	-.57025	2.15940	-4.20334	.96515	.32257	.32257
21.00000	-4.00213	.28966	-.09849	-.42716	1.20291	-4.38046	.86388	.20293	.20293
24.00000	-2.78311	.14054	-.07694	-.23525	.53100	-3.84128	.77552	.09960	.09960
27.00000	-1.44643	.03852	-.04417	-.07132	.13230	-2.42889	.71353	.02759	.02759
30.00000	.0000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.68966	.00000	.00000

表 10-20a)

弹性理论影响线坐标值

58.00000 16.00000 40.00000 .50000						
X	M <sub>x</sub>	H <sub>x</sub>	Q <sub>x</sub>	M <sub>4</sub>	M <sub>3</sub>	N <sub>1</sub> N <sub>41</sub> N <sub>42</sub>
-40.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000 .00000 .00000
-36.00000	-1.92982	.03893	.04402	-.09104	.29246	.03232 .03860 .03860
-32.00000	-3.71570	.14321	.07616	-.30880	1.02915	.12014 .14265 .14265
-28.00000	-5.34042	.29418	.09686	-.55873	2.02252	.24967 .29446 .29446
-24.00000	-6.79070	.47330	.10655	-.75082	3.08392	.40718 .47649 .47649
-20.00000	-8.05591	.66315	.10626	-.80230	4.05842	.57934 .67204 .67204
-16.00000	-9.11885	.84693	.09695	-.62636	4.80270	.75333 .86500 .86500
-12.00000	-9.97145	1.00947	.08002	-.15210	5.20006	.91719 1.04065 1.04065
-8.00000	-10.59342	1.13686	.05696	.69835	5.16648	1.05982 1.18542 1.18542
-4.00000	-10.98032	1.21968	.02959	1.96847	4.66675	1.17315 1.28984 1.28984
.00000	-11.11031	1.24825	.00000	3.72014	3.69213	1.24873 1.34410 1.34410
4.00000	-10.98031	1.21968	-0.2959	1.96847	2.29979	1.28293 1.34473 1.34473
8.00000	-10.59342	1.13686	-.05696	.69835	.60968	1.27632 1.29367 1.29367
12.00000	-9.97146	1.00947	-.08002	-.15210	-1.20134	1.23445 1.19928 1.19928
16.00000	-9.11885	.84693	-.09695	-.62635	-2.95368	1.16292 1.06980 1.06980
20.00000	-8.05591	.66315	-.10626	-.80230	-4.44828	1.07073 .91774 .91774
24.00000	-6.79070	.47330	-.10655	-.75082	-5.44008	.96794 .41204 .41204
28.00000	-5.04043	.29418	-.09686	-.55873	-5.72638	.86603 .25781 .25781
32.00000	-3.71570	.14321	-.07616	-.30880	-5.06400	.77692 .12621 .12621
36.00000	-1.92982	.03893	-.04402	-.09104	-3.22884	.71372 .03448 .03448
40.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.68966 .00000 .00000

表 10-20b)

线性挠度理论影响线坐标值

$f=16, R=58, L/2=40, n=50000, Y_0=4.14100, H_x=758.540$									
$X$	$M_x$	$H_x$	$Q_x$	$M_d$	$M_s$	$M_j$	$N_j$	$N_{41}$	$N_{48}$
-40.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000
-36.00000	-1.92892	.03874	.04410	-.09442	-.07594	.29431	.03213	.03472	.03472
-32.00000	-3.71173	.14117	.07669	-.31144	-.28181	1.03008	.11831	.12757	.12757
-28.00000	-5.33749	.29067	.09803	-.56566	-.58771	2.03070	.24632	.26501	.26501
-24.00000	-6.78906	.46831	.10827	-.75566	-.95728	3.59542	.40239	.43171	.43171
-20.00000	-8.05044	.65647	.10801	-.78937	-1.34833	4.05515	.57330	.61313	.61313
-16.00000	-9.12281	.84343	.09906	-.62256	-1.71836	4.84175	.74934	.79868	.79868
-12.00000	-9.97792	1.00566	.08194	-.12549	-2.00944	5.22568	.91311	.96915	.96915
-8.00000	-10.60309	1.13302	.05835	.74999	-2.16915	5.16738	1.05608	1.11536	1.11536
-4.00000	-10.99017	1.21532	.03037	2.04664	-2.14261	4.63696	1.16946	1.22786	1.22786
.00000	-11.12380	1.24644	.00000	3.79406	-1.87270	3.65776	1.24742	1.30052	1.30052
4.00000	-10.99016	1.21532	-.03037	2.04664	-1.29329	2.20774	1.28031	1.32302	1.32302
8.00000	-10.60309	1.13302	-.05835	.74999	-1.38247	.49940	1.27450	1.30287	1.30287
12.00000	-9.97792	1.00567	-.08194	-.12551	.87662	-1.32910	1.23303	1.24381	1.24381
16.00000	-9.12281	.84343	-.09906	-.62255	2.50374	3.08281	1.16184	1.15281	1.15281
20.00000	-8.04044	.65647	-.10801	-.78938	4.50875	-4.58578	1.06711	1.03705	1.03705
24.00000	-8.05044	.46831	-.10827	-.75566	2.85727	-5.56611	.90551	.32309	.32309
28.00000	-6.78906	.29067	-.09863	-.56567	1.58899	-5.81160	.86430	.20347	.20347
32.00000	-5.33749	.14117	-.07669	-.31144	.70053	-5.10515	.77581	.09997	.09997
36.00000	-3.71173	.03874	-.04409	-.09442	.17436	-3.32328	.71364	.02772	.02772
40.00000	-1.92892	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.68966	.00000	.00000
.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000

表 10-2(a)

弹性理论影响线坐标值

X	M <sub>x</sub>	H <sub>x</sub>	72.50000						50.00000						0.50000					
			Q <sub>x</sub>	M <sub>d</sub>	M <sub>t</sub>	M <sub>j</sub>	N <sub>j</sub>	N <sub>d</sub>	N <sub>t</sub>	Q <sub>x</sub>	M <sub>d</sub>	M <sub>t</sub>	M <sub>j</sub>	N <sub>j</sub>	N <sub>d</sub>	N <sub>t</sub>				
-50.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000				
-45.00000	-2.41228	0.03893	0.04402	-0.11380	-0.09029	0.36558	0.03232	0.03860	0.03860	0.03232	0.03860	0.03860	0.03232	0.03860	0.03860	0.03860				
-40.00000	-4.46463	0.14321	0.07616	-0.38600	-0.34508	1.28643	0.12014	0.14265	0.14265	0.12014	0.14265	0.14265	0.12014	0.14265	0.14265	0.14265				
-35.00000	-6.67553	0.29418	0.09686	-0.69842	-0.71878	2.52815	0.24967	0.29446	0.29446	0.24967	0.29446	0.29446	0.24967	0.29446	0.29446	0.29446				
-30.00000	-8.48837	0.47330	0.10655	-0.93853	-1.17017	3.85489	0.40718	0.47649	0.47649	0.40718	0.47649	0.47649	0.40718	0.47649	0.47649	0.47649				
-25.00000	-10.06990	0.66315	0.10626	-1.00288	-1.64759	5.07301	0.57934	0.67204	0.67204	0.57934	0.67204	0.67204	0.57934	0.67204	0.67204	0.67204				
-20.00000	-11.39857	0.84693	0.09695	-0.78295	-2.09304	6.00336	0.75332	0.86500	0.86500	0.75332	0.86500	0.86500	0.75332	0.86500	0.86500	0.86500				
-15.00000	-12.46432	1.00947	0.08002	-0.19012	-2.45088	6.50008	0.91719	1.04065	1.04065	0.91719	1.04065	1.04065	0.91719	1.04065	1.04065	1.04065				
-10.00000	-13.24178	1.13586	0.05696	0.87294	-2.64779	6.45810	1.05982	1.18542	1.18542	1.05982	1.18542	1.18542	1.05982	1.18542	1.18542	1.18542				
-5.00000	-13.72540	1.21967	0.02959	2.46059	-2.62619	5.83344	1.17315	1.28984	1.28984	1.17315	1.28984	1.28984	1.17315	1.28984	1.28984	1.28984				
0.00000	-13.88789	1.24825	0.00000	4.05017	-2.29923	4.61516	1.24873	1.34410	1.34410	1.24873	1.34410	1.34410	1.24873	1.34410	1.34410	1.34410				
5.00000	-13.72540	1.21967	-0.02959	2.46059	-1.60555	2.87473	1.28293	1.34472	1.34472	1.28293	1.34472	1.34472	1.28293	1.34472	1.34472	1.34472				
10.00000	-13.24178	1.13686	-0.05696	0.87294	-0.49579	0.76210	1.27632	1.29367	1.29367	1.27632	1.29367	1.29367	1.27632	1.29367	1.29367	1.29367				
15.00000	-12.46432	1.00947	-0.08002	-0.19012	-1.04824	-1.50167	1.23445	1.19928	1.19928	1.23445	1.19928	1.19928	1.23445	1.19928	1.19928	1.19928				
20.00000	-11.39856	0.84693	-0.09695	-0.78295	-3.05924	-3.69209	1.16292	1.06980	1.06980	1.16292	1.06980	1.06980	1.16292	1.06980	1.06980	1.06980				
25.00000	-10.06989	0.66315	-0.10626	-1.00288	-5.53948	-5.55286	1.07073	0.91774	0.91774	1.07073	0.91774	0.91774	1.07073	0.91774	0.91774	0.91774				
30.00000	-8.48837	0.47330	-0.10655	-0.93853	-3.50233	-6.80011	0.96794	0.41204	0.41204	0.96794	0.41204	0.41204	0.96794	0.41204	0.41204	0.41204				
35.00000	-6.67553	0.29418	-0.09686	-0.69842	-1.93816	-7.15798	0.86603	0.25781	0.25781	0.86603	0.25781	0.25781	0.86603	0.25781	0.25781	0.25781				
40.00000	-4.46463	0.14321	-0.07616	-0.38600	0.84671	-6.33000	0.77692	0.12621	0.12621	0.77692	0.12621	0.12621	0.77692	0.12621	0.12621	0.12621				
45.00000	-2.41228	0.03893	-0.04402	-0.11380	0.20889	-4.43605	0.71372	0.03448	0.03448	0.71372	0.03448	0.03448	0.71372	0.03448	0.03448	0.03448				
50.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.68966	0.00000	0.00000	0.68966	0.00000	0.00000	0.68966	0.00000	0.00000	0.00000				

线性挠度理论影响线坐标值

表 10-21b)

$f=20, R=72.5, l/2=50, n=0.500000, Y_0=5.17700, H_g=942.750$								
$X$	$M_x$	$H_x$	$Q_x$	$M_d$	$M_j$	$N_j$	$N_{d1}$	$N_{d2}$
-50.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
-45.00000	-2.41097	0.03869	0.04412	-0.11844	0.36954	0.03208	0.03466	0.03466
-40.00000	4.63913	0.19106	0.07677	-0.39073	1.29031	0.11817	0.12743	0.12743
-35.00000	-6.67102	0.29035	0.09818	-0.70974	2.54441	0.24612	0.26481	0.26481
-30.00000	-8.48538	0.46825	0.10848	-0.94820	3.87952	0.40220	0.43154	0.43154
-25.00000	-10.06229	0.65660	0.10826	-0.99065	5.08369	0.57322	0.16306	0.16306
-20.00000	-11.40288	0.84379	0.09932	-0.78154	6.07068	0.74942	0.79881	0.79881
-15.00000	-12.47222	1.00632	0.08218	-0.15863	6.55331	0.91342	0.96954	0.96954
-10.00000	-13.25414	1.13394	0.05853	0.93818	6.48085	1.05662	1.11599	1.11599
-5.00000	-13.73832	1.21644	0.03046	2.56140	5.81616	1.17020	1.22870	1.22870
0.00000	-13.90539	1.24761	0.00000	4.74691	4.58796	1.24827	1.30146	1.30146
5.00000	-13.73832	1.21644	-0.03046	2.56139	2.76970	1.28119	1.32398	1.32398
10.00000	-13.25414	1.13394	-0.05853	0.93817	0.62760	1.27529	1.30372	1.30372
15.00000	-12.47222	1.00632	-0.08218	0.15864	1.10121	1.23367	1.24448	1.24448
20.00000	-11.40288	0.84379	-0.09932	0.78155	3.13846	1.16228	1.15326	1.15326
25.00000	-10.06229	0.65660	-0.10826	0.9065	5.64589	1.06737	1.03730	1.03730
30.00000	-8.48538	0.46825	-0.10848	0.94821	3.58029	0.96562	0.32316	0.32316
35.00000	-6.67102	0.29053	-0.09818	0.70974	1.99216	0.84430	0.20345	0.20345
40.00000	-4.63913	0.14106	-0.07677	0.39073	0.87864	0.77578	0.09992	0.09992
45.00000	-2.41097	0.03869	-0.04412	0.11844	0.21876	0.71362	0.02770	0.02770
50.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.68966	0.00000	0.00000



表 10-22a)

弹性理论影响线坐标值

X	87.00000 24.00000 60.00000 .50000											
	$M_z$	$H_z$	$Q_z$	$M_d$	$M_s$	$M_j$	$N_j$	$N_{41}$	$N_{42}$			
-60.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000			
-54.00000	-2.89473	.03893	.04402	.13656	-.10835	.43870	.03232	.03860	.03860			
-48.00000	-5.57355	.14321	.07616	-.46320	-.41409	1.54371	.12014	.14265	.14265			
-42.00000	-8.01064	.29418	.09686	-.83810	-.86253	3.03378	.14967	.29446	.29446			
-36.00000	-10.18604	.47330	.10655	-1.12623	-1.40420	4.62587	.40718	.47649	.47649			
-30.00000	-12.08388	.66315	.10626	-1.20345	-1.97710	6.08761	.57934	.67204	.67204			
-24.00000	-13.67828	.84693	.09695	-.93953	-2.51164	7.20402	.75332	.86500	.86500			
-18.00000	-14.95718	1.00947	.08002	-.22814	-2.94106	7.80009	.91719	1.04065	1.04065			
-12.00000	-15.89013	1.13686	.05696	1.04753	3.17734	7.74971	1.05982	1.18542	1.18542			
-6.00000	-16.47047	1.21967	.02959	2.95272	-3.15143	7.00011	1.17315	1.28984	1.28984			
.00000	-16.66547	1.24825	.00000	5.58021	-2.75907	5.53818	1.24873	1.43410	1.43410			
6.00000	-16.47048	1.21967	-.02959	2.95272	-1.92665	3.44966	1.28293	1.34472	1.34472			
12.00000	-15.89013	1.13686	-.05696	1.04753	-.59494	.91451	1.27632	1.29367	1.29367			
18.00000	-14.95718	1.00947	-.08002	-.22815	1.25789	-1.80201	1.23445	1.19928	1.19928			
24.00000	-13.67828	.84693	-.09695	-.93953	3.67109	-4.43051	1.16292	1.06980	1.06980			
30.00000	-12.08387	.66315	-.10626	-1.20345	6.64738	-6.66343	1.07073	.91774	.91774			
36.00000	-10.18604	.47330	-.10655	-1.12623	4.20280	-8.16014	.96794	.41204	.41204			
42.00000	-8.01064	.29418	-.09686	-.83810	2.32579	-8.58958	.86603	.25781	.25781			
48.00000	-5.57355	.14321	-.07616	-.46320	1.01605	-7.95601	.77692	.12621	.12621			
54.00000	-2.89473	.03893	-.04402	-.13656	.25067	-4.84327	.71372	.03448	.03448			
60.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.68966	.00000	.00000			

表 10-22b)

线性挠度理论影响线坐标值

$f=24, R=87, l/2=60, n=, 00000, Y_0=6.21200, H_0=1047.980, 1$									
$X$	$M_x$	$H_x$	$Q_x$	$M_d$	$M_d$	$M_j$	$N_j$	$N_{d1}$	$N_{d2}$
-60.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000
-54.00000	-2.89315	.03870	.04412	-.14223	-.11421	.44247	.03208	.03467	.03467
-48.00000	-5.56695	.14108	.07678	-.46923	-.42397	1.54923	.11818	.12745	.12745
-42.00000	-8.00523	.29059	.09819	-.85240	-.88442	3.05515	.24616	.26486	.26486
-36.00000	-10.19251	.46836	.10850	-1.13891	-1.44093	4.65839	.40226	.43161	.43161
-30.00000	-12.07486	.65676	.10828	-1.19017	-2.02992	6.10462	.57332	.61318	.61318
-24.00000	-13.68364	.84402	.09934	-.93950	-2.58718	7.29020	.74957	.79898	.79898
-18.00000	-14.96692	1.00660	.08219	-.19210	-3.02545	7.87024	.91361	.96976	.96976
-12.00000	-15.90530	1.13427	.05855	1.12406	-3.26555	7.78395	1.05686	1.11625	1.11625
-6.00000	-16.48638	1.21681	.03047	3.07201	-3.22478	6.98656	1.17047	1.22899	1.22899
.00000	-16.68688	1.24799	.00000	5.69476	-2.81726	5.51241	1.24855	1.30177	1.30177
6.00000	-16.48639	1.21681	-.03047	3.07202	-1.94402	3.32985	1.28146	1.32428	1.32428
12.00000	-15.90530	1.13427	-.05855	1.12409	-.57247	.75833	1.27554	1.30400	1.30400
18.00000	-14.96692	1.00660	-.08219	-.19209	1.32174	-1.99313	1.23388	1.24472	1.24472
24.00000	-13.68364	.84401	-.09934	-.93949	3.76677	-4.63079	1.16245	1.15345	1.15345
30.00000	-12.07486	.65676	-.10828	-1.19018	6.77583	-6.88933	1.06751	1.03745	1.03745
36.00000	-10.18251	.46836	-.10850	-1.13891	4.29705	-8.36114	.96570	.32326	.32326
42.00000	-8.00523	.29059	-.09819	-.85239	2.39107	-8.72759	.86435	.20356	.20356
48.00000	-5.56695	.14108	-.07678	-.46922	1.05461	-7.66397	.77580	.09994	.09994
54.00000	-2.89315	.03870	-.04412	-.14223	.26258	-4.85201	.71362	.02771	.02771
60.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.68966	.00000	.00000

不同计算理论所得恒载内力值

表 10-23

基本参数		$\frac{f}{l} = 1/5$ , 腹孔跨径 = $\frac{l}{10}$ , 实腹段长 = $\frac{1}{5} \times \frac{l}{2}$ $E = 2.6 \times 10^5 \text{MPa}$ , $n = 0.5$ , 桥面: 净 7 + 2 × 1.5m					
跨径 (m)	截面位置 及内力 计算 理论	拱 顶		拱 跨 $\frac{1}{4}$		拱 脚	
		弯矩 (kN · m)	轴力 (kN)	弯矩 (kN · m)	轴力 (kN)	弯矩 (kN · m)	轴力 (kN)
40.0	弹性 理论	39.8316	461.8121	9.0342	$\frac{505.9677}{479.7461}$	12.1110	615.0301
	线性挠度 理论	46.2776	458.7613	9.8129	$\frac{503.1428}{476.9245}$	13.6987	613.4702
	非线性 挠度理论	48.1607	456.7397	10.3801	$\frac{501.0489}{474.8306}$	14.6033	611.0743
	误 差	20.911	- 1.098	14.898	- 0.972	20.579	- 0.643
60.0	弹性 理论	52.3105	591.3304	47.3542	$\frac{647.4612}{612.7812}$	- 31.1715	799.9705
	线性挠度 理论	59.5498	590.0010	48.9001	$\frac{645.2181}{610.5398}$	- 35.2117	798.1123
	非线性 挠度理论	61.5519	587.3692	49.7592	$\frac{643.7539}{609.0746}$	- 36.9023	797.0951
	误 差	17.666	- 0.670	5.079	- 0.573	- 18.385	- 0.359
80.0	弹性 理论	146.8201	758.5403	21.4000	$\frac{830.1221}{787.9801}$	40.1917	1015.7100
	线性挠度 理论	167.9204	757.0101	23.4454	$\frac{828.1078}{785.9699}$	44.9231	1013.1124
	非线性 挠度理论	170.0983	754.1665	24.0713	$\frac{826.0277}{783.8898}$	47.3037	1012.5550
	误 差	15.855	- 0.577	12.483	- 0.493	17.695	- 0.311
100.0	弹性 理论	204.4611	942.7500	42.9211	$\frac{1031.1400}{978.1501}$	14.2101	1270.0700
	线性挠度 理论	231.8752	939.9017	44.120	$\frac{1030.0010}{978.0117}$	16.9101	1268.4400
	非线性 挠度理论	238.3148	937.7518	46.7832	$\frac{1026.4580}{974.4684}$	17.4180	1266.4580
	误 差	16.557	- 0.530	8.998	- 0.454	22.574	- 0.284

续上表

基本参数		$\frac{f}{l} = 1/5$ , 腹孔跨径 = $\frac{l}{10}$ , 实腹段长 = $\frac{1}{5} \times \frac{l}{2}$ $E = 2.6 \times 10^5 \text{MPa}$ , $n = 0.5$ , 桥面: 净 7 + 2 × 1.5m					
截面位置 及内力 计算 理论 跨径 (m)		拱 顶		拱 跨 $\frac{1}{4}$		拱 脚	
		弯矩 (kN·m)	轴力 (kN)	弯矩 (kN·m)	轴力 (kN)	弯矩 (kN·m)	轴力 (kN)
120.0	弹性理论	163.7906	1047.9800	206.9000	$\frac{1147.1601}{1084.5004}$	-207.2188	1432.8607
	线性挠度理论	183.7208	1045.2111	210.0010	$\frac{1146.0101}{1083.3381}$	-230.01770	1429.9091
	非线性挠度理论	193.9662	1042.5020	214.5706	$\frac{1142.0300}{1079.3680}$	-244.3613	1425.8950
	误差	18.423	-0.523	3.707	-0.447	-17.924	-0.277

附注: (1) 表中有两个数据者, 分子为该截面以左值, 分母为该截面以右值;

(2) 误差值系指非线性挠度理论与弹性理论的误差。

活载内力计算表

表 10-24

基 本 参 数		$l = 120\text{m}$ , $f = 24\text{m}$ , $n = 0.5$ , $E = 2.6 \times 10^4 \text{MPa}$ , 汽车—20 级			
截面位置	计算理论	内力值		最大正弯矩及其相应轴力	
				最小负弯矩及其相应轴力	
		$M_{\max}$	$N$	$M_{\min}$	$N$
拱 顶	弹性理论	326.5400	119.5420	-137.1648	78.2660
	线性挠度理论	336.7640	119.4471	-151.4571	77.4586
	非线性挠度理论	337.1020	119.4760	-157.5928	77.4489
	误差	3.131	-0.008	-10.420	-1.032
		3.235	-0.006	14.893	-1.044
$\frac{1}{4}$ 跨	弹性理论	437.8761	55.8680	-363.6247	169.5080
			47.5922		
	线性挠度理论	446.9538	55.4342	-372.7978	168.9129
			47.1584		

续上表

基 本 参 数		$l = 120\text{m}, f = 24\text{m}, n = 0.5,$ $E = 2.6 \times 10^4\text{MPa}, \text{汽车 --20 级}$					
截面位置	计 算 理 论	内 力 值		最大正弯矩及其相应轴力		最小负弯矩及其相应轴力	
		$M_{\max}$	$N$	$M_{\min}$	$N$		
$\frac{1}{4}$ 跨	非线性挠度理论	447.1623	55.4323 47.1564	- 373.5164	168.9351		
	误 差	2.073	- 0.776	- 2.522	- 0.351		
		2.121	- 0.780	- 2.720	- 0.338		
		0.047	- 0.003	- 0.193	0.013		
拱 脚	弹性理论	925.6040	134.6207	- 791.7481	130.4000		
	线性挠度理论	928.8386	134.1332	- 812.0094	130.1808		
	非线性挠度理论	929.7498	134.1356	- 812.3814	130.1826		
	误 差	0.349	- 0.362	- 2.559	- 1.068		
		0.448	- 0.360	- 2.6061	- 0.167		
		0.098	0.002	- 0.001	- 0.001		

总内力计算表

表 10-25

基 本 参 数		$l = 120\text{m}, f = 24\text{m}, n = 0.5,$ $E = 2.6 \times 10^4\text{MPa}, \text{汽车 --20 级}$					
截面位置	计 算 理 论	内 力 值		最大正弯矩及其相应轴力		最小负弯矩及其相应轴力	
		$M_{\max}$	$N$	$M_{\min}$	$N$		
拱 顶	弹性理论	480.4306	1167.5220	26.6258	1126.2460		
	线性挠度理论	500.4848	1164.6585	32.2637	1122.6697		
	非线性挠度理论	531.0682	1161.9780	36.3734	1119.9509		
	误 差	4.174	- 0.245	21.175	- 0.318		
		10.540	- 0.475	36.611	- 0.559		
		6.111	0.230	12.738	- 0.242		

续上表

基 本 参 数		$l = 120\text{m}, f = 24\text{m}, n = 0.5,$ $E = 2.6 \times 10^4 \text{MPa}, \text{汽车} \cdots 20 \text{级}$			
截面位置	计 算 理 论	内 力 值		最大正弯矩及其相应轴力	
		$M_{\max}$	$N$	$M_{\min}$	$N$
$\frac{1}{4}$ 跨	弹性理论	644.7761	1203.0281 1132.0926	-156.7247	1316.6881 1254.0084
	线性挠度理论	650.9548	1201.4343 1130.4965	-162.7968	1314.9130 1252.2510
	非线性挠度理论	661.7326	1197.4623 1126.5244	-158.9461	1310.9651 1248.3031
	误 差	0.958 2.630 1.656	-0.132 0.463 -0.311	-3.874 -1.417 2.365	-0.133 -0.433 -0.300
拱 脚	弹性理论	718.3852	1567.4814	-998.9669	1563.2606
	线性挠度理论	698.6616	1564.0423	-1042.1864	1560.0899
	非线性挠度理论	685.3885	1563.0306	-1056.7427	1559.0776
	误 差	-2.746 -4.593 -1.900	-0.219 -0.284 -0.006	-4.326 -5.784 -1.397	-0.203 -0.268 -0.065

说明:表 10-24、10-25 中,误差栏部分最上面的数字是线性挠度理论与弹性理论的误差,中间数据为非线性挠度理论与弹性理论的误差,下面数据为线性与非线性挠度理论的误差。

# 第十一章 模型试验

## 11.1 等截面悬链线拱模型<sup>[2]</sup>

### 11.1.1 模型及材料参数

试验模型如图 11-1 所示。拱轴曲线选用悬链线：

$$y = \frac{f}{m-1}(\operatorname{ch}k\zeta - 1) \quad (11-1)$$

图中： $f_0 = 20\text{cm}$ ,  $l_0 = 120\text{cm}$ ,  $m = 3.5$ 。

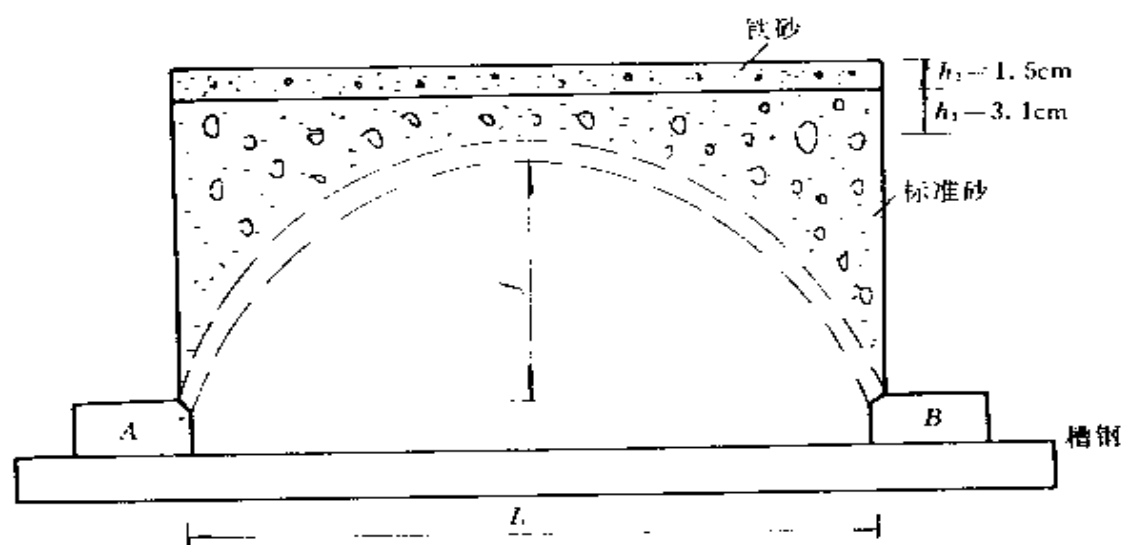


图 11-1 等截面悬链线拱试验模型

拱圈材料选用有机玻璃，宽  $b = 18\text{cm}$ ，厚  $d = 1\text{cm}$ 。

将拱圈的拱脚处固结在作为桥台用的有机玻璃块 A、B 上。A、B 的尺寸均为：长  $12\text{cm}$ 、宽  $18\text{cm}$ 、高  $5\text{cm}$ 。然后将 A、B 固定在槽钢上，以保证桥台不发生相对位移。为避免侧墙与拱圈产生摩擦力，用支承在桥台上的木模作为侧墙，再在拱上加铺标准砂和铁砂作

为恒载。

材料容重测定如下：

有机玻璃容重  $r_1 = 1.171\text{g/cm}^3$

标准砂容重  $r_2 = 1.446\text{g/cm}^3$

铁砂容重  $r_3 = 4.049\text{g/cm}^3$

材料容重测定后，即可求出恒载推力  $H_g = 256\text{N}$

有机玻璃弹性模量测定如下：

在拱圈中，压应力是主要的，因此用拉伸试验测定弹性模量。在图 11-2 所示的有机玻璃板中部贴上应变片，为防止初始变形引起误差先预加 250N 的拉力，荷载分五级，每级加载量 50N，最大加载量为 250N，试验中控制模型应力未超过 700MPa，即其在弹性范围内工作。

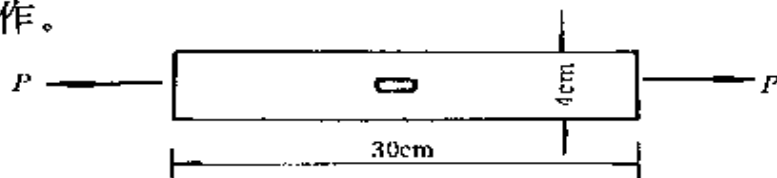


图 11-2 弹模测定

拉伸弹性模量的计算公式为：

$$E = \frac{P}{bh\varepsilon} \quad (11-2)$$

其中： $P$ ——拉力荷载；

$b, h$ ——应变片处板的宽度和厚度；

$\varepsilon$ ——实测应变值。

通过实验，求得有机玻璃弹性模量为：

$$E = 2.80 \times 10^3 \text{MPa}$$

### 11.1.2 试验结果

内力测试主要是测定拱脚、 $\frac{1}{4}$  处、拱顶截面的最大正弯矩所对应的拱中应力，测试时所加荷载为沿横桥向的线荷载，计算时可按集中力考虑，加载位置按线性挠度理论所计算的弯矩影响线来确定。测点位置及加载截面如图 11-3 所示。即测试拱顶时，加载于



24 号截面(拱顶),测试拱脚时,加载于 18 号截面 $\left(\frac{5l}{8}\right)$ 处;测试 $\frac{1}{4}$ 处时,加载于 12 号截面 $\left(\frac{1}{4}\right)$ 处,试验是在恒温状态下进行的( $t = 24^{\circ}\text{C}$ )

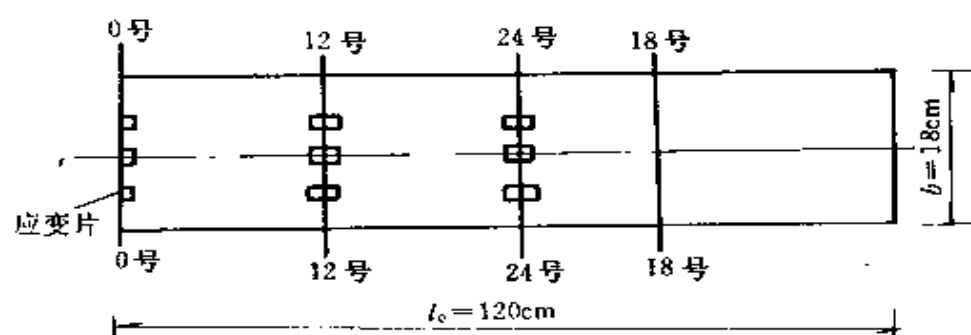


图 11-3 试点位置

两种理论计算的内力值如表 11-1 所示;

理论计算值

表 11-1

截面位置	荷载 (10N)	挠 度 理 论		弹 性 理 论	
		弯 矩 (0.1N·m)	轴 力 (10N)	弯 矩 (N·m)	轴 力 (10N)
拱 顶	3	21.9341	5.6383	20.3404	5.5163
	9	67.9220	16.9148	61.0211	16.5490
	15	116.7359	28.1914	101.7018	27.5817
	18	142.2025	33.8297	122.0422	33.0980
$\frac{1}{4}$ 处	3	23.0385	3.2683	21.0618	3.2713
	9	70.5933	9.8049	63.1855	9.8139
	15	120.1183	16.3415	105.3092	16.3566
	18	145.6197	19.6098	126.3710	19.6279
拱 脚	3	22.1839	4.7860	20.3852	4.7353
	9	66.5518	14.3581	61.1555	14.2058
	15	111.9115	23.9206	101.9263	23.6674
	18	133.8110	28.7162	122.3110	28.4117

理论及实验应力值如表 11-2 所示。

计算值与试验值的比较

表 11-2

截面位置	荷 载 (10N)	应 力(0.1N·m)		
		挠度理论	弹性理论	实 验
拱 顶	3	+ 6.9981	+ 6.4737	+ 6.54
	9	+ 21.7010	+ 19.4210	+ 20.68
	15	+ 37.3458	+ 32.3683	+ 38.12
	18	+ 45.214	+ 38.8420	+ 44.04
$\frac{1}{4}$ 处	3	+ 7.4979	+ 6.8389	+ 8.64
	9	+ 22.9864	+ 20.5166	+ 21.71
	15	+ 39.1316	+ 34.1944	+ 44.38
	18	+ 47.4505	+ 41.0331	+ 45.46
拱 脚	3	+ 7.1287	+ 6.5320	+ 5.44
	9	+ 21.3863	+ 19.5960	+ 15.98
	15	+ 35.9749	+ 32.6674	+ 24.36
	18	+ 43.0083	+ 39.1919	+ 32.08

表 11-2 表明:拱脚实测值与两种理论计算值均相差较远,其原因在于拱脚很难做得完全固结,与计算模式有一定差别,因此拱脚测试不作为分析依据。

在后两级荷载中,即当  $P$  分别为 150 和 180N 时,拱顶和  $\frac{1}{4}$  处的实测值与挠度理论比较接近,误差在 5% 以内,而在前两级荷载中,即当  $P$  分别为 130 和 90N 时,由于两种理论计算值本身差别不大,很难判断更接近那种理论。

## 11.2 变截面悬链线拱模型<sup>[3]</sup>

### 11.2.1 模型及材料参数

实验采用有机玻璃制作拱圈模型,具体尺寸如下:

净跨  $l_0 = 120\text{cm}$ ,拱圈宽  $b = 18\text{cm}$ ,拱顶厚  $d = 1\text{cm}$ ,拱轴系

数  $m = 3.5$ , 截面变厚度系数  $n = 0.5$ , 净矢高  $f_0 = 20\text{cm}$ , 拱脚粘接在长  $12\text{cm}$ , 宽  $18\text{cm}$  的有机玻璃块上, 然后固定在槽钢上。拱上铺砂和铁砂作为恒载(见图 11-4)

三种材料的容重及铺装厚度如下:

$$\gamma_{\text{有机玻璃}} = 1.171\text{g/cm}^3$$

$$\gamma_{\text{砂}} = 1.446\text{g/cm}^3 \quad h_1 = 3.1\text{cm}$$

$$\gamma_{\text{铁砂}} = 4.049\text{g/cm}^3, \quad h_2 = 1.5\text{cm}$$

$$\text{恒载产生的水平推力为} \quad H_x = 25.6\text{kg}$$

弹性模量的测定方法同 11.1.1 结果亦相同。

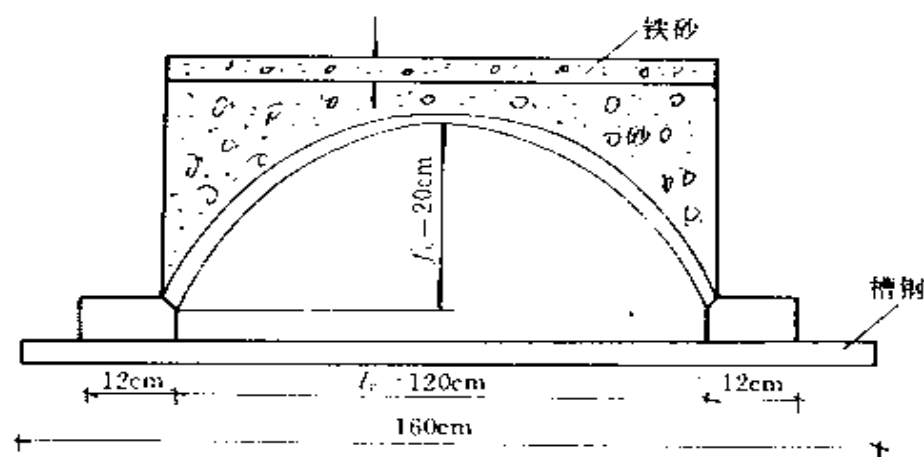


图 11-4 变截面悬链线拱试验模型

### 11.2.2 试验结果

内力测试主要是测定拱脚、1/4 跨, 拱顶截面的最大正弯矩所对应的拱中应力。测试时所施加荷载为集中力, 加载位置按线性挠度理论所计算的弯矩影响线图形来确定, 即测试拱顶时, 加载于 12 号截面, 测试拱脚时, 加载于 9 号, 测试 1/4 时, 加载于 6 号截面的左边, 测点布置如图 11-5 所示。

由于模型拱脚很难做得完全固结, 与计算模式有一定的差别, 测出的拱脚应力难于用来说明问题, 因此, 下面将主要对拱顶, 1/4 跨截面应力进行分析。

两种理论计算的内力值见表 11-3。

理论及实验应力值见表 11-4。

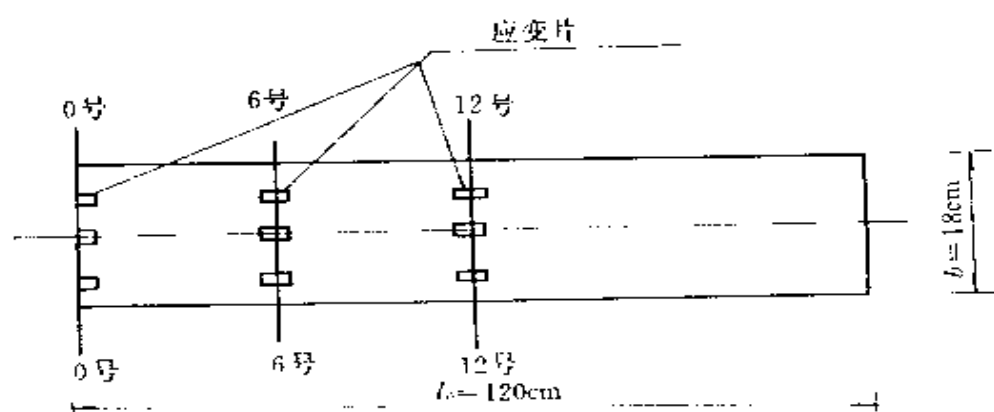


图 11-5 试点布置

理论计算值

表 11-3

截面位置	荷载 (10N)	挠 度 理 论		弹 性 理 论	
		弯 矩 (0.1N·m)	相应轴力 (10N)	弯 矩 (0.1N·m)	相应轴力 (10N)
$\frac{1}{4}$ 跨	3	20.69	2.23	19.67	2.22
	9	62.86	6.68	59.60	6.67
	15	105.70	11.12	98.34	11.12
	18	127.55	13.34	118.01	13.34
拱 顶	3	18.81	4.63	18.0	4.37
	9	57.79	14.01	53.99	13.11
	15	98.07	23.50	89.99	21.86
	18	118.75	28.29	107.50	26.23

计算值与试验值的比较

表 11-4

截面位置	荷载 (10N)	应 力 (0.1N·m)		
		挠度理论	弹性理论	实 验
$\frac{1}{4}$ 跨	3	5.43	5.16	6.82
	9	16.51	15.48	14.43
	15	27.79	25.79	28.86
	18	33.51	30.96	12.82

续上表

截面位置	荷载 (10N)	应 力(0.1N·m)		
		挠度理论	弹性理论	实 验
拱 顶	3	6.01	5.76	6.90
	9	18.49	17.27	19.71
	15	31.38	28.78	33.11
	18	38.01	34.38	40.40

从表中可以看到,在拱顶实验值与挠度理论值比较接近,基本上是从上限接近挠度理论的。1/4 跨处,当荷载为 150N 和 180N 时,实测值趋近于挠度理论,而在前面两级荷载中,两种理论值差别不大。

## 11.3 变截面圆弧拱模型<sup>[1]</sup>

### 11.3.1 模型及材料参数

实验模型如图 11-6 所示。

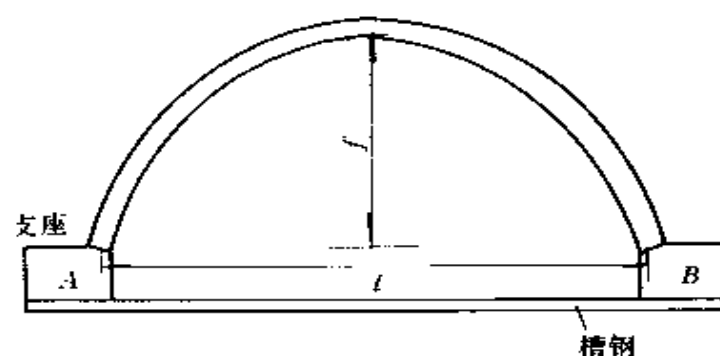


图 11-6 圆弧线拱试验模型

其中: $f = 20\text{cm}$ ,  $l = 120\text{cm}$ , 轴线用半径  $R = 100\text{cm}$  圆弧线。拱圈用有机玻璃, 宽  $b = 12\text{cm}$ , 拱顶厚  $1\text{cm}$ , 变截面系数  $n = 0.5$ , 将拱脚粘结在长  $12\text{cm}$ , 宽  $12\text{cm}$  的有机玻璃块上(A、B), 然后, 用槽钢固定, 以保证桥台不发生相对位移。

材料容量测定如下

有机玻璃容量  $\gamma = 1.172\text{g/cm}^3$ , 可以算得恒载推力  $H_g =$

13.75N。

弹性模量的测定方法同 11.1.1,其结果为:

$$E = 2.78 \times 10^4 \text{kg/cm}^2$$

### 11.3.2 试验结果

内力测试主要测定拱顶、 $\frac{1}{4}$  跨、拱脚截面最大正弯矩所对应的拱中应力,加载分别于 0—0( $x=0$ ), 1—1( $x=\frac{l}{4}$ ), 2—2( $x=\frac{3l}{20}$ ),如图 11-7 所示。

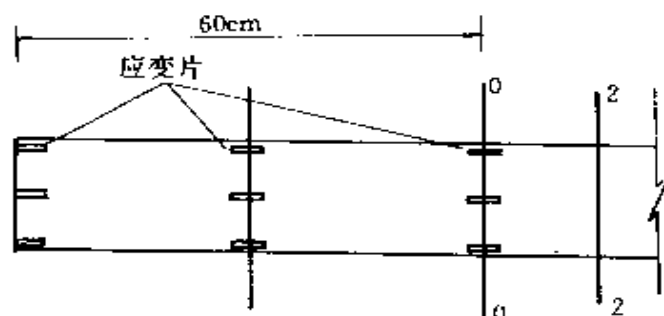


图 11-7 测点布置

计算时以集中荷载考虑。加载是沿拱横向加一线荷载。在拱顶、 $\frac{1}{4}$  跨、拱脚截面的内侧和外侧各贴三个相互平行的应变片,以便相互校核保证精度。

两种理论计算的内力值如表 11-5 所示。

理 论 计 算 值

表 11-5

截面位置	荷载 (10N)	挠 度 理 论		弹 性 理 论	
		弯 矩 (0.1N·m)	轴 力 (10N)	弯 矩 (0.1N·m)	轴 力 (10N)
拱 顶	2	11.09574	2.97229	10.93928	2.97350
	5	28.01803	7.45435	27.24820	7.43375
	8	45.29076	11.06593	43.75712	11.89400
	11	62.93111	16.50888	60.16604	16.35425
	14	80.86910	21.08913	76.57496	20.81450

续上表

截面位置	荷载 (10N)	挠 度 理 论		弹 性 理 论	
		弯 矩 (0.1N·m)	轴 力 (10N)	弯 矩 (0.1N·m)	轴 力 (10N)
拱 顶	17	99.39925	25.69549	92.98388	25.27475
	20	118.94028	30.22980	109.39280	29.73475
$\frac{1}{4}$ 跨	2	13.52150	2.00385	13.38140	2.01360
	5	34.01579	5.00762	33.54360	5.03400
	8	54.77019	8.00889	53.52770	8.05440
	11	75.79164	11.00769	73.59770	11.07480
	14	97.08672	14.00376	93.66990	14.09520
	17	118.66290	16.99741	113.74200	17.11560
	20	143.67240	24.14780	133.81410	20.1360
拱 脚	2	14.88295	2.57056	14.86180	2.57650
	5	37.71397	6.43448	37.154509	6.44125
	8	61.18722	10.30838	59.44720	10.30600
	11	85.34032	14.19241	81.73990	14.73075
	14	110.21940	18.08696	104.03260	18.03550
	17	135.87650	21.99249	126.32530	21.90025
	20	162.65870	26.07350	148.61800	25.76500

理论及实验应力值如表 11-6 所示。

计算值与试验值的比较

表 11-6

截面位置	荷载 (10N)	应 力(0.1N·m)		
		挠度理论	弹性理论	实 验 值
拱 顶	8	21.6482	20.8874	21.54
	11	30.0893	28.7202	31.21
	14	38.6688	36.5529	37.92
	17	47.5583	44.3857	48.06
	20	56.9510	52.2185	57.23

续上表

截面位置	荷载 (10N)	应 力(0.1N·m)		
		挠度理论	弹性理论	实 验 值
$\frac{1}{4}$ 跨	8	21.3112	20.8100	22.02
	11	29.4962	28.6137	30.16
	14	37.7910	36.4174	38.11
	17	16.1983	44.2211	46.52
	20	55.9673	52.0248	56.83

因拱脚难以实现完全固结拱脚截面的测试值不作为分析依据。

拱顶和 $\frac{1}{4}$ 跨处的实测应力值与挠度理论比较接近。



## 附录 I 分部积分法

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$$

$$\text{或} \quad \int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

## 附录 II Bessel 微分方程及其解答<sup>[5]</sup>

微分方程

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - r^2)y = 0$$

称为  $r$  阶 Bessel 方程,  $r$  可以是任何实数或复数, 当  $r \neq$  整数时, 其两个特解为  $J_r$  和  $J_{-r}$ , 其中  $J_r$  和  $J_{-r}$  线性无关, 它们的级数表达式为:

$$J_{\pm r}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{K!} \frac{1}{\Gamma(\pm r + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k \pm r}$$

其中  $\Gamma(x)$  表示伽马函数, 通常定义是:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

$J_r(x)$  的积分表达式可写为:

$$J_r(x) = \frac{(x/2)^r}{\sqrt{\pi} \Gamma(r + \frac{1}{2})} \int_0^{\pi} \cos(x \cdot \cos \theta) \cdot \sin^{2r} \theta d\theta$$

该公式的适用范围是  $\operatorname{Re}(r + \frac{1}{2}) > 0$

Bessel 函数具有以下性质:

递推关系:

$$\frac{d}{dx}(x^r J_r) = x^r J_{r-1}$$

$$\frac{d}{dx}(x^{-r} J_r) = -x^{-r} J_{r+1}$$

$$-rJ_r + xJ'_r = -xJ_{r+1}$$

$$J_{r-1} + J_{r+1} = \frac{2r}{x} J_r$$

$$J_{r-1} + J_{r+1} = 2J'_r$$

$$\left(\frac{d}{x dx}\right)^m \{x^r J_r\} = x^{r-m} J_{r-m}$$

$$\left(\frac{d}{x dx}\right)^m \{x^{-r} J_r\} = (-1)^m x^{-r-m} J_{r+m}$$

$$J_{\pm r}(xe^{i\theta}) = e^{ir\theta} J_{\pm r}(x)$$

朗斯基行列式:

$$\begin{aligned} W(J_r, J_{-r}) &= J_r J'_{-r} - J'_{-r} J_r \\ &= \frac{2 \sin r \pi}{\pi x} \end{aligned}$$

## 附录 III 二阶线性微分方程的参数变异法求解<sup>[4]</sup>

设方程  $y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x)$

在所考虑的区间是连续的, 这时有:

如果  $\psi_1(x), \psi_2(x)$  是对应齐次方程:

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$$

的基本解组, 则:

$$y = \psi_2 \int \frac{\psi_1 h}{w} dx - \psi_1 \int \frac{\psi_2 h}{w} dx + c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2$$

是方程的通解, 其中:

$$w(x) = \psi_1 \psi'_2 - \psi'_1 \psi_2$$

附录 IV 
$$I_x = \frac{I_d \sec \varphi}{\left[ 1 - (1 - n) \frac{|x|}{l} \right]}$$

## 时挠度理论分析程序

C FILE M;BOX.FOR

¥INCLUDE:'COMMON.FOR'

¥DEBUG

CALL DAT

CALL INPUT

N=0

HX1=HHH

4 N=N+1

WRITE(\*,7)N

7 FORMAT(1X,'ITERATION NUMBRE',6X,I3)

BAT=SQRT((HG+HX1)/(CONFIC \* E))

CONFIC=BAT \* HSPEN/(1. -CONFN)

CALL SOUTH

CALL TSU

CALL SLOVE

IF(ABS(HX).GT.1.)GOTO 1

EPS1=ABS(HX-HX1)

GOTO 2

1 EPS1=ABS(HX-HX1)/ABS(HX)

2 IF(EPS1.LE.1.OE-4)GOTO 5

HX1=HX

GOTO 4

5 STOP

END

C FILE M;INPUT. FOR

SUBROUTINE INPUT

¥INCLUDE:'COMMON. FOR'

¥DEBUG

READ(\*,\*)F,CONFM,HSPEN,CONFN,ELCY,  
CONFAC,CONFIC,E,HG,NPA,HHH

DO 18 I=1,NPA

18 READ(\*,\*)P(I),CONFA(I)

WRITE(\*,123)

123 FORMAT(1X,'\* \* \* \* \* BISCA PAMATRE  
OF BRIDGE \* \* \* \* \*')

WRITE(\*,15)F,CONFM,HSPEN,CONFN,ELCY

WRITE(\*,11)CONFAC,CONFIC,E,HG

WRITE(\*,111)

111 FORMAT(1X,'\* \* \* \* \* LOAD CASE \*  
\* \* \* \* \*')

DO 19 I=1,NPA

19 WRITE(\*,17)i,P(i),CONFA(i)

¥DEBUG

PAI=3.1415926

YJDET=HSPEN\*PAT/3(3.\*SQRT(3.)\*0.5\*  
(1.-CONFN))

17 FORMAT(3X,I3,6X,'P=/',F9.5,5X,'CONFA=',  
F9.5)

11 FORMAT(3X,'CONFAC=',F9.5,2X,'CONFIC=  
,F9.5,2X,'E=',F12.3,2Z,

\* 'Hg=',12.4/)

15 FORMAT(3X,'F=/',F9.5,1X,'CONFM=',F9.5,  
1X,'HSPEN=',F9.5,

```

* 1X,'CONFN=' ,F9.5. 1X,'ELCY=' ,F9.5)
RETURN
END

```

C FILE M:COMMON.FOR

```

COMMON/SP/F,CONF,M,HSPEN,CONFN,CONF-
FAC,CONFIC,ELCY,HG,E,HHH
COMMON/CL/PAI,YJDET,CONF,C,NPA
COMMON/MT/W1(20),C1(20),CONFA(15),P
(15)
COMMON/WORK/Y21,Y22,Y31,Y32,Y41,Y42,
Y2,Y2L,Y3L,Y4L,
* Y2,Y4,DFAI1L,DFAI2L,FAI14,FAI24,FAI10,
FAI20,FAI1L,FAI2L,
* AA2,AA3,AA4,A2C2,A3C3,B2D2,DFAI10,
DFAI20,
* Q4,P4,T2,T3,S2,S3,U4,B3D3,DTY1,DTY2,
DTY,DTT,DTN,DTAC,
* DTBD,DTAS,DTYL
COMMON/WORMT/Y11,Y12,Y1,F11,F12,F1,
* AA1,BB1,A1C1,B1D1,Q1,T1,S1,
* U1,Y1L,F1L,HX,QX,PMX,PMT,PMFL,PMQL,
VJL,PNJL,QJL,WD,WL4,EPS

```

C FILE M:DAT.FOR

```

SUBROUTINE DAT
¥INCLUDE,'COMMON.FOR'
W1(1)=0.1527534
W1(2)=0.1491730
W1(3)=0.1420961

```

```

W1(4)=0.1316886
W1(5)=0.1181945
W1(6)=0.1019301
W1(7)=0.08327674
W1(8)=0.06267205
W1(9)=0.04060143
W1(10)=0.01761401
C1(1)=0.07652652
C1(2)=0.2277858
C1(3)=0.3737061
C1(4)=0.5108670
C1(5)=0.6360537
C1(6)=0.7463319
C1(7)=0.8391170
C1(8)=0.9122344
C1(9)=0.9639719
C1(10)=0.8831286
DO 48 I=11,20
C1(I)=-C1(I-10)
48 W1(I)=W1(I-10)
RETURN
END

```

C FILE M,PBESSEL. FOR

SUBROUTINE PBESSEL(IGAM,X,BESSEL)

¥INCLUDE:'COMMON.FOR'

¥DEBUG

C EVALUATE THE POISSON INTERGATION  
I=IGAM  
IF(I.EQ.2)GOTO 2

```

ORDER=2. /3.
GAMMA=0. 92763
GOTO 15
2  ORDER=4. /3.
   GAMMA=0. 940566
15  POISS=0.
    DO 20 IPOIS=1. 10
      AC=PAI * 0. 5 * C1(IPOIS)
20  POISS=POISS+W1(IPOIS) * COS(X * SIN(AC))
    * COS(AC) * * (2. * ORDER)
    BESSEL=SQRT(PAI) * (X * 0. 5) * * ORDER/
    GAMMA * POISS
RETURN
END

```

C FILE M:PBESL13. FOR

SUBROUTINE PBESL13(DIST,BESL13)

C EVALUATE THE BESSEL FUNCTION WITH ORDER=—  
1. /3.

¥INCLUDE:'COMMON.FOR'

¥DEBUG

```

ORDER1=2. /3.
ORDER2=5. /3.
GAMMA1=0. 92763
GAMMA2=1. 08254
POISS1=0.
POISS2=0.
DO 10 IPOIS=1. 10
  AC=PAI * 0. 5 * C1(IPOIS)
  POISS1=POISS1+W1(IPOIS) * COS(DIST * SIN

```

```

(AC)) * COS(AC) * * (2. * ORDER1)
10 POISS2=POISS2+W1(IPOIS) * COS(DIST * SIN
(AC)) * COS(AC) * * (2. * ORDER2)
BESL1=SQRT(PAI) * (DIST * 0.5) * * ORDER1/
GAMMA1 * POISS1
BESL2=SQRT(PAI) * (DIST * 0.5) * * ORDER2/
GAMMA2 * POISS2
BESL13=-BESL2+4./3./DIST * BESL1
RETURN
END

```

C FILE M:PBESL23.FOR

SUBROUTINE PBESL23(DIST,BESL23)

C EVALUATE THE BESSEL FUNCTION WITH ORDER =  
1./3.

¥INCLUDE:'COMMON.FOR'

¥DEBUG

```

ORDER1=4./3.
ORDER2=7./3.
GAMMA1=0.940566
GAMMA2=1.724057
POISS1=0.
POISS2=0.
DO 10 IPOIS=1,10
AC=PI * 0.5 * C1(IPOIS)
POISS1=POISS1+W1(IPOIS) * COS(DIST * SIN
(AC)) * COS(AC) * * (2. * ORDER1)
10 POISS2=POISS2+W1(IPOIS) * COS(DIST * SIN
(AC)) * COS(AC) * * (2. * ORDER2)
BESL1=SQRT(PAI) * (DIST * 0.5) * * ORDER1/

```



```

GAMMA1 * POSS1
BESL2 = SQ/T (PAI) * (DIST * 0.5) * * ORDER2/
GAMMA1 * POSS2
DESL23 = -BESL2 + 8. /3. /DIST * BESL1
RETURN
END

```

C FILE M;SLOVE. FOR

SUBROUTINE SLOVE

¥INCLUDE;'COMMON. FOR'

¥DEBUG

```

DET = DFAI20 * FAI1L - DFAI10 * FAI2L
XF = 0.5 * HSPEN
TGJ = HSPEN/SQRT(CONFM * * 2 - HSPEN * *
2)
COSJ = SQRT(1. / (1. + TGJ * * 2))
SINJ = SQRT(1. - COSJ * * 2)
CALL YNX(XF, -XF, 1)
QX = -U1/U4
HX = (S1 * T3 - T1 * S3) / (T2 + DTT) * S3 - (S2 +
DTS) * T3)
PMX = (S1 * (T2 + DTT) - T1 * (S2 + DTS)) / (T3
* (S2 + DTS) -
* S3 * (T2 + DTT))
YF = F1L + Y1L + 2. * HX * (Y2L + DTYL) + 2. *
PMX * Y3L
QW = Q1 + QX * Q4
PW = P1 + QX * P4
A = 0.5 * (QW - YF * DFAI20/DET)
B = 0.5 * (QW - YF * DFAI10/DET)

```

```

WD=A * FAI10+B * FAI20
WL4=A * FAI14+B * FAI24+Y1+HX * Y2+
PMX * Y3+QX * Y4
PMFL=QX * HSPEN+HX * (F-ELCY)+PMX
PMT=PMX-HX * ELCY+PMOET(0.)+(HG+
HX) * WD
PMQL=QX * HSPEN * 0.5+HX * (Y(0.5 *
HSPEN)-ELCY)+PMX
* +(HX+HG)+WL4+PMOET(XF)
VOL=0.
DO 18 I=1,NPA
18 VOL=VOL+(CONFA(I)+HSPEN) * P(I) * 0.5/
HSPEN
SIN4=HSPEN/CONFM * 0.5
COS4=SQRT(1.0-(HSPEN/CONFM * 0.5) * *
2)
VVL1=0.0
VVL2=0.0
VVL3=0.0
DO 99 I=1,NPA
IF(CONFA(I)-HSPEN/2.0)27,28,29
27 VVL1=0.0
GO TO 99
28 VVL2=VVL2+P(I)
GO TO 99
29 VVL3=VVL3+P(I)
99 CONTINUE
PN41=HX * COS4+(VOL-QX-VVL3) * SIN4
PN42=PN41-VVL2 * SIN4
PQ41=HX * SIN4-(VOL-QX-VVL3) * COS4

```

```

PQ42=PQ41-VVL2 * COS4
VJL=-QX+VOL
PNJL=HX * COSJ+VJL * SINJ
QJL=HX * SINJ-VJL * COSJ
WRITE( *,118)T2,T3,DTT,T1,S2,S3,DTS,S1,
U4,U1
WRITE( *,128)EPS
128  FORMAT(25X,'EPS=',E14.7)
118  FORMAT(1X,'T2=',E14.6,3X,'T3=',E14.6,
      3X,'DTT=',E14.6,3X,
      *  'T1=',E14.6,/1X,'S2=',E14.6,3X,'S3=',E14.
      6,3X,'DTS=',E14.6,3X,
      'S1=',E14.6,/1X,'U4=',E14.6,3X,'U1=',E14.
      6/)
      WRITE( *,111) QX, HX, PMX, PMT, PMFL,
      PMQL,PNJL,QJL
111  FORMAT(1X,'Qx=',F14.6,5X,'Hx=',f14.6,5x,
      'Mx=',F14.6/1X,
      *  'Md=',F14.6,5X,'Mj=',F14.6,5x,'M(1/4)=' ,
      F14.6,/1X,
      *  'Nj=',F14.6,5X,'Qj=',F14.6/)
      WRITE( *,333)PN41,PN42,PQ41,PQ42
333  FORMAT(1X,'N41=',F14.6,5X,'N42=',F14.
      6,/1X,'Q41=',F14.6
      *  5X,'Q42=',F14.6/)
      WRITE( *,132)WD,WL4
132  FORMAT(1X,'WD=/',E14.6,5X,'W(1/4)=' ,
      E14.6/)
      RETURN
      END

```

C FILE M:YNX.FOR

SUBROUTINE YNX \* DISTY,DISTF,IOPT)

¥INCLUDE:'COMMON.FOR'

¥DEBUG

Y11=0.

Y12=0.

F11=0.

1 F12=0.

Y21=0.

Y22=0.

Y31=0.

Y32=0.

Y41=0.

Y42=0.

DTY1=0.

DTY2=0.

DO 10 TYN=1,20

DISTY1=DISTY \* 0.5 \* (C1(IYN)+1.)

CPY=1. - (1. - CONFN) \* DISTY1/HSPEN

X1=2./3. \* CONFC \* CPY \* \* (3./2.)

C ORDER=1./3.

CALL PBESL23(X1,BESSEL)

FALL PBESL13(X1,BESL13)

CALL PBESSEL(2,X1,DJ43)

DFAI1X=(CONFC \* CPY \* DJ43-1./SQRT(CPY)  
\* BESSEL) \* (1. -

\* CONFN)/HSPEN

CALL PBESSEL(1,X1,DJ23)

DFAI2X=CONFC \* CPY \* (1. - CONFN)/HSPEN

```

      * DJ23
      Y21=Y21+FAI1*(Y(DISTY1)-ELCY)*CPY*
      W1(IYN)*DISTY*0.5/(E*
*      * CONFIC)
      Y31=Y31+FAI1*CPY*W1(IYN)*DISTY*0.
      5/(E*CONFIC)
      Y32=Y32+FAI2*CPY*W1(IYN)*DISTY*0.
      5/(E*CONFIC)
      DTY1=DTY1+F1X(DISTY1)*DFI1X*W1
      (IYN)*DISTY*0.5/E
      DTY2=DTY2+F1X(DISTY1)*DFI2X*W1
      (IYN)*DISTY*0.5/E
      IF(IOPT.EQ.0)GOTO 8
      Y41=Y41+F11*DISTY1*CPY*W1(IYN)*DIS-
      TY*0.5/(E*CONFIC)
      Y42=Y42+F12*DISTY1*CPY*W1(IYN)*DIS-
      TY*0.5/(E*CONFIC)
8      DISTF1=-DISTF*0.5*(C1(IYN)-1.)
      CPF=1.+(1.-CONFN)*DISTF1/HSPEN
      X2=2./3.*CONFC*CPF***(3./2.)
      CALL PBESL23(X2,BESSEL)
      PSI1=SQRT(CPF)*BESSEL
      CALL PBESL13(X2,BESL13)
      PS12=SQRT(CPF)*BESL13
      Y11=Y11+FAI1*PMOET(DISTY1)*CPY*W1
      (IYN)*DISTY*0.5/(E*
*      CONFIC)
      Y12=Y12+FAI2*PMOET(DISTY1)*CPY*W1
      (IYN)*DISTY*0.5/(E*
*      CONFIC)

```

```

      F11 = Y11 + PSI1 * PMOET (DISTY1) * CPF * W1
      (IYN) * (-DISTF) * 0.5/(E
*      * CONFIC)
      F12 = F12 + PSI2 * PMOET (DISTY1) * CPF * W1
      (IYN) * (-DISTF) * 0.5/(E
*      * CONFIC)
10    CONTINUE
      X1 = (1. - (CONFN) * DISTY/HSPEN) * * (3. /
      2.) * 2. /3. * CONFC
      CALL PBESL13(X1,BESL13)
      FAI2 = SQRT (1. - (1. - CONFN) * DISTY/
      HSPEN) * BESL13
      CALL PBESL23(X1,BESSEL)
      FAI1 = SQRT (1. - (1. - CONFN) * DISTY/
      HSPEN) * BESSEL
      Y2 = -YJDET * (FAI2 * Y21 - FAI1 * Y22)
      Y3 = -YJDET * (FAI2 * Y31 - FAI1 * Y32)
      DTY = -YJDET * (-FAI2 * DTY1 + FAI1 *
      DTY2)
      IF(IOPT.EQ.0)GOTO 17
      Y4 = -YJDET * (FAI2 * Y41 - FAI1 * Y42)
17    X2 = 2. /3. * CONFC * (1. + (CONFN) * DISTF/
      HSPEN) * * (3. /2.)
      CALL PBESL13(X2,BESL13)
      PSI2 = SQRT (1. + (1. - CONFN) * DISTF/
      HSPEN) * BESL13
      CALL PBESL23(X2,BESSEL)
      PSI1 = SQRT (1. + (1. - CONFN) * DISTF/
      HSPEN) * BESSEL
      F1 = -YJDET * (PSI2 * F11 - PSI1 * F12)

```

```

Y1=-YJDET*(FAI2*Y11-FAI1*Y12)
RETURN
END

```

C FILE M:SOUTH.FOR

SUBROUTINE SOUTH

C....EVALUATE THE OTHER COFFICIENTS.....

¥INCLUDE:'COMMON.FOR'

C 1. DFAI10,DFAI1L

C ORDER=4./3.

¥DEBUG

X=2./3.\*CONF C

CALL PBESSEL(2,X,BESSEL)

DFAI10 = CONF C \* (1. - CONF N)/HSPEN \*  
BESSEL

X=2./3.\*CONF C \* CONF N \* \* (3./2.)

CALL PBESSEL(2,X,BESSEL)

DFAI1L = CONF C \* CONF N \* (1. - CONF N)/  
HSPEN \* BESSEL

C ORDER=1./3.

X=2./3.\*CONF C \* CONF N \* \* (3./2.)

CALL PBESL23(X,BESSEL)

DFAI10 = DFAI10 - (1. - CONF N)/HSPEN \*  
BESSEL

X=2./3.\*CONF C \* CONF N \* \* (3./2.)

CALL PBESSEL(1,X,BESSEL)

DFAI2L = CONF C \* CONF N \* (1. - CONF N)/  
HSPEN \* BESSEL

X=2./3.\*CONF C

CALL PBESSEL(1,X,BESSEL)

```

      DFAI20 = CONF C * (1. - CONFN)/HSPEN *
      BESSEL
C   3. FAI10,FAI1L
C   ORDER=1. /3.
      X=2. /3. * CONF C
      CALL PBESL23(X,BESSEL)
      FAI10=BESSEL
      X=2. /3. * CONF C * CONFN * * (3. /2. )
      CALL PBESL23(X,BESSEL)
      FAI1L=SQRT(CONFN) * BESSEL
C   4. FAI20,FAI2L
      X=2. /3. * CONF C
      CALL PBESL13(X,BESL13)
      FAI20=BESL13
      X=2. /3. * CONF C * CONFN * * (3. /2. )
      CALL PBESL13(X,BESL13)
      FAI2L=SQRT(CONFN) * BESL13
C   5. FAI14,FAI23
      X=2. /3. * CONF C * (1. - (1. - CONFN) * 0. 50)
      * * (3. /2. )
      CALL PBESL23(X,BESSEL)
      FAI14=BESSEL * SQRT(1. - (1. - CONFN) * 0.
      5)
      CALL PBESL13(X,BESL13)
      FAI24=BESL13 * SQRT(1. - (1. - CONFN) * 0.
      5)
C   6. THE ORHER CONFFICIENTS
      CALL YNX(HSPEN, -HSPEN,1)
      Y2L=Y2
      Y3L=Y3

```



```

Y4L=Y4
DTYL=DTY
DET=DFAI20 * FAI1L-DFAI10 * FAI2L
AA2=-YJDET * (DFAI2L * Y21-DFAI1L * Y22
AA3=-YJDET * (DFAI2L * Y31-DFAI1L * Y32
AA4=-YJDET * (DFAI2L * Y41-DFAI1L * Y42
DTAS=YJDET * (DFAI2L * DTY1-DFAI1L *
DTY2
A3C3=-2. * Y3 * DFAI20/DET
B3D3=2. * Y3 * DFAI10/DET
A2C2=-2. * Y2 * DFAI20/DET
B2D2=2. * Y2 * DFAI10/DET
DTAC=-2. * DTYL * DFAI20/DET
DTBD=2. * DTYL * DFAI10/DET
DET1=FAI2L * FAI10-FAI1L * FAI20
Q4=FAI20 * 2. * Y4/DET1
P4=-FAI10 * 2. * Y4/DET1
Y1L=Y1
F1L=F1
Q1=-FAI20 * (F1-Y1)/DET1
P1=FAI10 * (F1-Y1)/DET1
BB1=YJDET(DFAI2L * F11-DFAI1L * F12)
AA1=-YJDET * (DFAI2L * Y11-DFAI1L * Y12)
A1C1=-(F1+Y1) * DFAI20/DET
B1D1=(F1+Y1) * DFAI10/DET
RETURN
END

```

C FILE M:TSU.FOR  
SUBROUTINE TSU

¥INCLUDE:'COMMON.FOR'

¥DEBUG

T1=0.

T2=0.

T3=0.

DTT=0.

DO 10 ITSU=1,20

DISTY=HSPEN \* 0.5 \* (C1(ITSU)+1.)

DISTF=HSPEN \* 0.5 \* (C1(ITSU)+1.)

XY=2./3. \* CONF C \* (1. - (1. - CONFN) \* DISTY/HSPEN) \* \* (3./2.)

CALL YNX(DISTY,DISTF,0)

C ORDER=1./3.

CALL PBESL23(XY,BESSEL)

CALL PBESL13(XY,BESL13)

FAI1=SQRT(1. - (1. - COFN) \* DISTY/HSPEN) \* BESSEL

FAI2=SQRT(1. - (1. - COFN) \* DISTY/HSPEN) \* BESL13

T3=T3+(A3C3 \* FAI1+B3D3+FAI2+2. \* Y3) \* 0.5 \* HSPEN \* DFY(DISTY) \*

\* W1(ITSU)

T2=T2+(A2C2 \* FAI1+B2D2 \* FAI2+2. \* Y2) \* 0.5 \* HSPEN \* DFY(DISTY)

\* \* W1(ITSU)

DTT=DTT+(DTAC \* FAI1+DTBD \* FAI2+2. \* DTY) \* DFY(DISTY)

\* -2. \* F2(DISTY)) \* 0.5 \* HSPEN \* W1(ITSU)

T1=T1+(A1C1 \* FAI1+B1D1 \* FAI2+Y1) \* DFY(DISTY)+

```

      * F1 * DFY(DISTF) * 0.5 * HSPEN * W1(ITSU)
10  CONTINUE
      S2 = - (A2C2 * DFAI1L + B2D2 * DFAI2L + 2. *
      AA2)
      S3 = - (A3C3 * DFAI1L + B3D3 * DFAI2L + 2. *
      AA3)
      DTS = - (DTAC * DFAI1L + DTBD * DFAI2L + 2.
      * DTAS)
      U4 = - (Q4 * DFAI1L + P4 * DFAI2L + 2. * AA4)
      T2 = - T2 + S2 * (F - ELCY)
      T3 = - T3 + S3 * (F - ELCY)
      DTT = - DTT + DTS * (F - ELCY)
      S1 = - (A1C1 * DFAI1L + B1D1 * DFAI2L + AA1 -
      BB1)
      U1 = - (Q1 * DFAI1L + P1 * DFAI2L + AA1 + BB1)
      T1 = - T1 + S1 * (F - ELCY)
      EPS = ABS(T3 - S2)
      RETURN
      END

```

Y. FOR 子程序是拱轴曲线  $Y(x) = F(x)$  等函数子程序, 这里仅以圆拱给出, 若为其它拱桥时, 应作相应变化。

C FILE M; Y. FOR

```

      FUNCTION Y(X)
      ¥INCLUDE: 'COMMON. FOR'
      Y = CONFM - SQRT(CONFM * * 2 - X * * 2)
      RETURN
      END
      FUNCTION DFY(X)
      ¥INCLUDE: 'COMMON. FOR'

```

```

      DFY=X * * 2/(CONFM * * 2-X * * 2)(3./2.)+
      1./SQRT(CONFM * * 2-X * * 2)
      RETURN
      END
      FUNCTION PMOET(X)
¥INCLUDE:'COMMON.FOR'
      PMOET=0.
      DO 16 I=1.NPA
      IF(X.LE.CONFA(I)) GOTO 10
      PMOET = PMOET + (HSPEN - X) * (HSPEN +
      CONFA(I)) * P(I)/HSPEN * 0.5
      GOTO 16
10      PMOET = PMOET + (HSPEN + X) * (HSPEN -
      CONFA(I)) * 0.5/HSPEN * P(I)
16      CONTINUE
      END
      FUNCTION FIX(X)
¥INCLUDE:'COMMON.FOR'
      GSI=X/HSPEN
      TG=X/SQRT(CONFM * * 2-X * * 2)
      SEC=1. + TG * TG
      FIX=(SEC * (1. - (1. - CONFN) * ABS(GST)))
      * * (1./3.)/CONFAC * TG
      RETURN
      END

```

输入标识符说明:

F —— 矢高(f);

CONFM —— 圆弧拱轴线半径(R);

HSPEN —— 半跨长(p);

CONFN —— 变截面系数(n);

ELCY ——弹性中心( $Y_0$ )；  
 CONFAC ——拱顶截面面积( $A_d$ )；  
 CONFIC ——拱顶截面抗弯惯矩( $I_d$ )；  
 E ——拱圈材料弹性模量( $E$ )；  
 HG ——弹性理论恒载推力值( $H_g'$ )；  
 NPA ——外载个数；  
 P(I) ——外载值；  
 CONFA(I) ——外载作用点横坐标；  
 HHH ——任意参数(大于1)。

## 附录 V $I_x = I_d \sec \varphi$ 时的线性 挠度理论分析程序

```

C FILE M;BOX1.FOR
¥INCLUDE:'COMMON.FOR;
      CALL DAT
      CALL INPUT
      CALL TSU
      CALL SLOVE
      DTOP
      END

C FILE M;INPUT.FOR
      SUBROUTINE INPUT
¥INCLUDE:'COMMON.FOR'
      READ(*,*)F,CONFM,HSPEN,CONFAC,CONFIC,ELCY,BAT,E,ELCY
      READ(*,*)P
  
```

```

WRITE(*,14)CONFAC,CONFIC,E,P
WRITE(*,17)
WRITE(*,15)F,CONFM,HSPEN,ELCY,BAT
WRITE(*,17)

```

¥DEBUG

```

CONFK1=ALOG(CONFM+SQRT(CONFM**2
-1.))
CONFK=1./(E*CONFIC*BAT)
17  FORMAT(1X,117('—'))
15  FORMAT(1X,'I',16X,'F=',F9.5,1X,'CONFM=
    'F9.5,1X,'HSPEN=',F9.5,
    * 4X,'ELCY=',F9.5,1X,'BAT=',F9.5,1X,
      'CONFN=1.0',14X,'I')
14  FORMAT(1X,'CONFAC=',F9.5,5X,'CONFIC=
    ',F9.5,5X,'E=',F12.3,
    * 5X,'P=',F9.5,/////)
RETURN
END

```

C FILEM;COMMON. FOR

```

COMMON/COTR/F, CONFM, HSPEN, CONFAC,
CONFIC,ELCY,HG,E
COMMON/CL/CONFK,CONFA,BAT,P,CONFK1
COMMON/MT/W1(32),C1(32)
COMMON/WORK/Y21, Y22, DTY1, DTY2, Y2,
DTY,T2,T3,S2,S3,
* U4,DTS,DTT,Y2L,DTYL
COMMON/WORMT/Y11(26),Y12(26),Y1(26),T1
(26),S1(26),
* U1(26),Y1L(26)

```

C FILE M:DAT1. FOR  
SUBROUTINE DAT  
¥INCLUDE: 'COMMON. FOR'

W1(1)=0.09654009  
W1(2)=0.09563872  
W1(3)=0.09384440  
W1(4)=0.09117388  
W1(5)=0.08765209  
W1(6)=0.08331192  
W1(7)=0.07819390  
W1(8)=0.07234579  
W1(9)=0.06582222  
W1(10)=0.05868409  
W1(11)=0.05099806  
W1(12)=0.04283590  
W1(13)=0.03427386  
W1(14)=0.02539207  
W1(15)=0.01627439  
W1(16)=0.00701861  
C1(1)=0.0483077  
C1(2)=0.1444720  
C1(3)=0.2392874  
C1(4)=0.3318686  
C1(5)=0.4213513  
C1(6)=0.5068999  
C1(7)=0.5877158  
C1(8)=0.6630443  
C1(9)=0.7321821  
C1(10)=0.7944838

```

C1(11)=0.8493676
C1(12)=0.8963212
C1(13)=0.9349061
C1(14)=0.9647623
C1(15)=0.9856115
C1(16)=0.9972639
DO 48 I=17,32
C1(I)=-C1(I-16)
48 W1(I)=W1(I-16)
RETURN
END

```

C FILE M;YNX1.FOR

SUBROUTINE YNX1(DISTY)

¥INCLUDE,'COMMON.FOR'

¥DEBUG

```

DO 1 I=1,26
Y11(I)=0.
1 Y12(I)=0.
Y21=0.
Y22=0.
DTY1=0.
DTY2=0.
DO 10 IYN=1,32
DISTY1=0.5*(DISTY+HSPEN)*C1(IYN)+
DISTY-HSPEN)
Y21=Y21*(Y(DISTY1)-CLCY)*SIN(BAT*DISTY1)*W1(IYN)
Y22=Y22*(Y(DISTY1)-CLCY)*SIN(BAT*DISTY1)*W1(IYN)

```



```

DTY1=DTY1+F1X(DISTY1)*COS(BAT*DIS-
TY1)*W1(IYN)
DTY2=DTY2+F1X(DISTY1)*COS(BAT*DIS-
TY1)*W1(IYN)
DO 15 I=1,26
IF(I.GT.13)GOTO 13
CONFA=(FLOAT(I)-1.)*HSPEN/12.
GOTO 7
13  CONFA=-(FLOAT(I)-14.)/12.*HSPEN
7    Y11(I)=Y11(I)+PMOET(DISTY1)*SIN(BAT*
DISTY1)*W1(IYN)
Y12(I)=Y12(I)+PMOET(DISTY1)*SIN(BAT*
DISTY1)*W1(IYN)
15  CONTINUE
10  CONTINUE
Y2=CONFK*0.5*(DISTY+HSPEN)*(COS
(BAT*DISTY)*DTY1+SIN(BAT*DISTY)
* Y22)
DTY=-0.5*(DISTY+HSPEN)*(COS(BAT*
DISTY)*DTY1+SIN(BAT*DISTY)
* (DTY2)-1./BAT*SIN(BAT*(DISTY+
HJSPEN)*FIX(HSPEN)
DO 18 I=1.26
18  Y1(I)=CONFK*0.5*(DISTY+HSPEN)*(COS
(BAT*DISTY)*Y11(I)
1   -SIN(BAT*DISTY)*Y12(I))
RETURN
END

```

C FILE M;SLOVE1.FOR

# SUBROUTINE SLOVE

¥INCLUDE: 'COMMON. FOR'

DIMENSION QX(26), HL(26), PMX(26), PMFL  
(26),

\* PMT(26), PMQL(26), VJL(26), QW(26), PW(26),

\* WD(26), WL4(26), Y10(26),

\* PNJL(26), QJL(26), QJL4(26), PN4L(26)

¥DEBUG

XF=0.5 \* HSPEN

TGJ=F/(CONFM-1.) + CONFK/HSPEN \* (EXP  
(CONFK)-EXP(-CONFK)) \* 0.5

TG14 = F/(CONFM-1.) \* CONFK/HSPEN \*  
(EXP(CONFK \* 0.5) - EXP(-CONFK

\* \* 0.5)) \* 0.5

COS14=SQRT(1./1.+TG14\*\*2))

SIN14=SQRT(1.-COS14\*\*2)

COSJ=SQRT(1./(1.+TGJ\*\*2))

SINJ=SQRT(1.-COSJ\*\*2)

Y3L=CONFK/BAT \* (-1.+COS(BAT\*2.\*  
HSPEN))

Y4L=CONFK/BAT \* (1.+BAT\*ISN(2.\*BAT\*  
HSPEN)-HSPEN \* COS(2.\*BAT\*

\* HSPEN)-HSPEN)

Y3F=CONFK/BAT \* (-1.+COS(1.5\*BAT\*  
HSPEN))

Y30 = CONFK/BAT \* (-1.+COS(BAT\*  
HSPEN))

Y4F=CONFK/BAT \* (1./BAT \* SIN(BAT\*1.5\*  
HSPEN \* COS(BAT\*1.5\*

\* HSPEN)-0.5 \* HSPEN)

```

      Y40 = CONFK/BAT * (1./BAT * SIN (BAT *
      HSPEN) - HSPEN * COS(BAT *
*   HSPEN))
      CALL YNX1(0.)
      Y20=Y2
      DTY0=DTY
      DO 27 I=1,26
27   Y10(I)=Y1(I)
      CALL YNX1(XF)
      DO 5 I=1,26
      IF(I,GT. 13)GOTO 2
      CONFA=(FLOAT(I)-1.) * HSPEN/12.
      GOTO 1
2   CONFA=-(FLOAT(I)-14.) * HSPEN/12.
1   QX(I)=-U1(I)/U4
      HL(I)=(S1(I) * T3-T1(I) * S3)/(T2+DTT) * S3
      -(S2+DTS) * T3)
      PMX(I)=S1(I) * (T2+DTT) - T1(I) * (S2+
      DTS))/(T3 * (S2+DTS) -
*   S3 * (T2+DTT))
      YF=Y1L(I)+HL(I) * (Y2L+DTYL)+PMX(I) *
      Y3L+QX(I) * Y4L
      EF=-0.5 * YF/SIN(BAT * HSPEN)
      FE=-0.5 * YF/COS(BAT * HSPEN)
      WD(I)=FE + Y10(I) + HL(I) * (Y20+DTY0) +
      PMX(I) * Y30+QX(I) * Y40
      WL4(I)=EF * SIN(BAT * XF)+FE * COS(BAT *
      XF)+Y1(I)+HL(I) * (Y2+DTY)
*   +PMX(I) * Y3F+QX(I) * Y4F
      PMFL(I)=QX(I) * HSPEN+HL(I) * (F-ELCY)

```

```

      +PMX(I)
      PMT(I)=PMX(I)-HL(I)*ELCY+PMOET(0.)
      +HG*WD(I)
      PMQL(I)=QX(I)*HSEPN*0.5+HL(I)*(Y(0.
      5*HSPEN)-ELCY)+PMX(I)
*      +HG*WL4(I)+PMOET(XF)
      IF(I.GT.13)GOTO 18
      VOL=(1.+FLOAT(I-1)/12.)*0.5*P
      GOTO 17
18      VOL=(1.-FLOAT(I-14)/12.)*0.5*P
17      VJL(I)=-QX(I)+VOL
      PNJL(I)=HL(I)*COSJ+VJL(I)*SINJ
      QJL(I)=HL(I)*SINJ-VJL(I)*COSJ
      IF(I.GT.13)GOTO 29
      IF(I.LE.7)GOTO 29
      PN4L(I)=HL(I)*COS14+(VJL(I)-P)*SIN14
      Q4L(I)=HL(I)*SIN14-(VJL(I)-P)*COS14
      GOTO 5
29      PN4L(I)=HL(I)*COS14+VJL(I)*SIN14
      Q4L(I)=HL(I)*SIN14-VJL(I)*COS14
5      CONTINUE
      PN4=HL(7)*COS14+(VJL(7)-P)*SIN14
      Q4=HL(7)*SIN14+(VJL(7)-P)*COS14
      WRITE(*,8)
      WRITE(*,7)
      WRITE(*,8)
      DO 12 I=1,26
      IF(I.GT.13)GOTO 100
      NO=14-I
      II=I-1

```

```

IF(I.EQ.7) WRITE(*,33)PN4,Q4
WRITE(*,16)II,QX(NO),HL(NO),PMX(NO),
PMT(NO),PMFL(NO),PMQL(NO),
* PNJL(NO),QJL(NO),PN4L(NO),Q4L(NO)
33  FORMAT(1X,'I',4X,'I',1X,8(10X,'I'),2(F9.5,
1X,'I'))
GOTO 13
100  I1=26-I
WRITE(*,9)II,QX(I),HL(I),PMX(I),PMT(I),
PMFL(I),PMQL(I),
* PNJL(I),QJL(I),PN4L(I),Q4L(I)
13  WRITE(*,8)
12  CONTINUE
8  FORMAT(1X,117('—'))
7  FORMAT(1X,'I NO I',5X,'Qx,4x','I,4X,'Hx,
'4X,'I',4X,'Mx,4X,
* 'I/,4X,'Mt',4X,'I',4X,'Mj',4X,'I',3X,'M1/4',
3X,'I',4X,'Nj'4X,
* 'I',4X,'QJ',4X,'I',4X,'N1/4',2X,
* 'I',3X,'Q1/4',3X,'I)
9  FORMAT(1X,'I',I3,1H','I',1X,10(F9.5,1X,'I'))
16  FORMAT(1X,'I',I3,1X,'I',1X,10(F9.5,1X,'I'))
WRITE(*,111)
111  FORMAT(1X,/////////)
WRITE(*,118)T2,T3,DTT,S2,S3,DTS,U4
DO 119 I=1,26
119  WRITE(*,121)I,T1(I),I,S1(I),IU1(I),I,WD(I)
118  FORMAT(1X,'T2=',E14.6,3X,'T3=',E14.6,
3X,'DTT=',E14.6/1X,
* 'S2=',E14.6,3X,'S3=',E14.6,3X,'DTS='E14.6,

```

```

        3X,'U4=',E14.6)
121   FORMAT(1X,'T1(',I2,')=',E14.6,7X,'S1(',I2,
        ')=',E14.6,7X
        * 'U1(',I2,')=',E14.6,7X,'Wd(',i2,')=',e14.6)
        RETURN
        END

```

C FILE M;TSU1. FOR

SUBROUTINE TSU

¥INCLUDE,'COMMON.FOR'

¥DEBUG

```

        DO 1 I=1,26
1      T1(I)=0.
        T2(I)=0.
        T3(I)=0.
        DTT=0.
        CALL YNX1(HSPEN)Y2L=Y2
        DTYL=DTY
        S2=CONFK * BAT * HSPEN/COS(BAT * HSPEN)
        * Y22
        S3 = 2. * SIN (BAT * HSPEN)/COS (BAT *
        HSPEN) * CONFK
        DTS = BAT/COS (BAT * HSPEN) * DTY2 *
        HSPEN
        U4 = 2. * CONFK * ( - HSPEN * COS (BAT *
        HSPEN)/SIN(BAT * HSPEN)+1. /BAT
        DO 6 I=1,26
        Y1L(I)=Y1(I)
        S1(I) = CONFK * BAT/COS (BAT * HSPEN) *
        HSPEN * Y12(I)

```

```

        U1(I) = CONFK * BAT / COS(BAT * HSPEN) *
        HSPEN * Y11(I)
6      CONTINUE
        DO 10 ITSU=1,32
        DISTY=HSPEN * C1(ITSU)
        CALL YNX1(DISTY)
        T2 = T2 + (-0.5 * Y2L / COS(BAT * HSPEN) *
        COS(BAT * DISTY) + Y2)
        *   * DFY(DISTY) * HSEPN * W1(ITSU)
        T3 = T3 + CONFK / BAT * HSPEN * (COS(BAT *
        DISTY) / COS(BAT * HSPEN) - 1.)
        *   * DFY(DISTY) * W1(ITSU)
        DTT = DTT + ((-0.5 * DTYL * COS(BAT * DIS-
        TY) / COS(BAT * HSPEN) + DTY)
        *   * DFY(DISTY) - F2(DISTY)) * HSPEN * W1(IT-
        SU)
        DO 8 I=1,26
        T1(I) = T1(I) + (-0.5 * Y1L(I) * COS(BAT * DIS-
        TY) / COS(BAT * HSPEN) +
        *   Y1(I)) * DFY(DISTY) * HSPEN * W1(ITSU)
8      CONTINUE
10     CONTINUE
        T2 = -T2 + S2 * (F - ELCY)
        T3 = -T3 + S3 * (F - ELCY)
        DTT = -DTT + DTS * (F - ECLCY)
        DO 11 I=1,26
11     T1(I) = -T1(I) + S1(I) * (F - ELCY)
        EPS = ABS(T3 - S2)
        WRITE(*,15)EPS
15     FORMAT(1X,'I',49X,'EPS=',E14.7,48X,'I')

```

```

RETURN
END

```

子程序 Y1.FOR 是拱轴曲线函数等函数子程序,这里是以悬链线为例给出的,若为其它拱轴,应作相应变化。

C FILE M:Y1.FOR

```

      FUNCTION Y(X)
      ¥INCLUDE:'COMMON.FOR'
      GSI=X/HSPEN
      Y=F/(CONFM-1.)*(0.5*(EXP(CONFK1*
      GSI)+EXP(-CONFK1*GSI))-1.)
      RETURN
      END
      FUNCTION DFY(X)
      ¥INCLUDE:'COMMON.FOR'
      GSI=X/HSPEN
      DFY=F/(CONFM-1.)*(CONFK1/HSPEN)*
      * 2*0.5*(EXP(CONFK1*GSI)+
      * EXP(-CONFK1*GSI))
      RETURN
      END
      FUNCTION F2(X)
      ¥INCLUDE:'COMMON.FOR'
      GSI=X/HSPEN
      SEC=1.+(CONFK1*F/HSPEN/(CONFM-1.)
      * 0.5*(EXP(CONFK1*GSI)-
      * EXP(-CONFK1*GSI)))*2
      F2=1./(E*CONFAC)*((1.-(1.-CONFN)*
      ABS(GSI))*
      * SEC**4)**(1./3.)

```



```

        RETURN
    END
    FUNCTION PMOET(X)
¥INCLUDE: 'COMMON. FOR'
        IF (X. LE. CONF A) GOTO 10
        PMOET (HSPEN - X) * (HSPEN + CONF A) * P /
        HSPEN * 0. 5
        GOTO 20
10      PMOET = (HSPEN + X) * (HSPEN - CONF A) * 0.
        5 / HSPEN * P
20      RETURN
    END
    FUNCTION FIX(X)
¥INCLUDE: 'COMMON. FOR'
        GSI = X / HSPEN
        TG = CONF K1 * F / HSPEN / (CONF M - 1. ) * 0. 5 *
        (EXP(CONF K1 * GSI) -
        * EXP(-CONF K1 * GSI))
        SEC = 1. + TG * TG
        FIX = (SEC * (1. - (1. - CONF N) * ABS(GSI))) *
        * (1. / 3. ) / (CONF AC * E) * TG
        RETURN
    END

```

输入标识符说明:

CONF M —— 拱轴系数(m);

BAT ——  $\frac{H'g}{EI}(\beta)$ 。

其余标识符意义同附录 IV。

## 参 考 文 献

- [1] 贺栓海. 圆弧拱桥的挠度理论分析. 西安: 西安公路交通大学学报. 1988 年 12 月.
- [2] 李子青. 等截面无铰拱的挠度理论分析. 西安: 西安公路交通大学学报. 1988 年 3 月.
- [3] 李毅谦. 变截面无铰拱的挠度理论分析. 西安: 西安公路交通大学学报. 1987 年 12 月.
- [4] 贺栓海等著. 现代桥梁结构分析. 西安: 陕西人民教育出版社. 1993.
- [5] 贺栓海等编著. 道路立交的规划与设计. 北京: 人民交通出版社. 1994.
- [6] 贺栓海. 谢仁物编著. 公路桥梁荷载横向分布计算方法. 北京: 人民交通出版社. 1996.
- [7] 贺栓海等. 拱桥的几何非线性分析——挠度理论. 北京: 中国公路学报. 1991 年. 第 3 期.
- [8] 何照福等. 拱的挠度理论——按非线性理论设计大跨径拱桥. 中国土木工程学会桥梁及结构工程学会学术会议论文. 1988 年.
- [9] 贺栓海等. 拱桥的非线性分析法——挠度理论. 哈尔滨: 东北公路. 1989 年. 第 4 期.
- [10] 贺栓海等. 拱的大变形内力分析. 上海: 华东公路. 1990 年. 第 6 期.
- [11] 贺栓海等. 拱的大变形内力再分析. 上海: 华东公路. 1991 年. 第 1 期.
- [12] 贺栓海等. 系杆拱桥内力分析新方法. 上海: 华东公路. 1989

年,第5期.

- [13] 项海帆、刘光栋著. 拱结构的稳定与振动. 北京:人民交通出版社. 1991 年.
- [14] E·卡姆克著. 张鸿林译. 常微分方程手册. 北京:科学出版社. 1980 年.
- [15] 王竹溪、郭敦仁. 特殊函数概论. 北京:科学技术出版社. 1979 年.
- [16] 姚玲森. 桥梁工程. 北京:人民交通出版社. 1985.